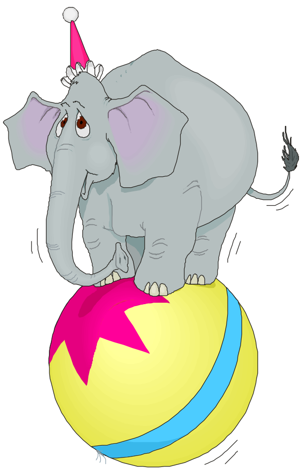
Corso di aggiornamento professionale

per l'Ordine Regionale dei Geologi dell'Emilia-Romagna

Bologna, 18 Giugno 1999

Appunti di….

ANALISI DI STABILITA' DEI VERSANTI ALL'EQUILIBRIO LIMITE



Matteo Berti

Dipartimento di Scienze della Terra e Geo-Ambientali

Università di Bologna

Sommario

1 Principi di base

La presentazione che segue vuole essere un breve cenno ai principi di base di meccanica dei suoli utilizzati nell’analisi di stabilità dei versanti. Lo scopo è quello di facilitare la comprensione dei concetti discussi nelle sezioni successive, con particolare riferimento ai diversi metodi di analisi attualmente disponibili ed alla scelta di appropriati parametri di resistenza dei mezzi geologici. Ovviamente, si rimanda alla letteratura di base per un’appropriata conoscenza di tali principi (es. Lambe & Whitman, 1969; Kezdi, 1974; Mitchell, 1976; Holtz & Kovacs, 1981; Das, 1983; Lancellota, 1987; Atkinson, 1993; Parry, 1995).

1.1 Principio degli sforzi efficaci

In un suolo (o in una roccia) gli sforzi sono trasmessi sia dallo scheletro solido sia dal fluido interstiziale. Lo scheletro solido trasmette gli sforzi normali e di taglio tramite i contatti intergranulari, mentre il fluido interstiziale può sostenere la sola componente sferica dello sforzo.
Le caratteristiche di resistenza e deformabilità del terreno sono controllate dallo stress trasmesso dallo scheletro solido attraverso i contatti interparticellari. Quando gli sforzi applicati al suolo sono completamente sostenuti dal fluido interstiziale, infatti, le tensioni agenti al contatto tra le particelle non subiscono alcuna variazione ed il comportamento del suolo non viene influenzato dagli sforzi applicati.
Questa è la base del *principio degli sforzi efficaci* (**σ’**) la cui equazione semplificata, riferita ad un piano posto ad una certa profondità **z** dalla superficie, è (Terzaghi, 1936):

$$\sigma' = \sigma - u \qquad [1]$$

dove **σ** è lo sforzo totale agente sul piano e **u** è la pressione dei pori alla stessa profondità (Fig1a, vedi Appendice a fine testo).
Lo sforzo totale **σ** è uguale alla forza totale per unità di area agente in direzione normale al piano, mentre il valore della pressione dei pori **u** dipende dallo schema di circolazione idrica all’interno del versante è può variare indipendentemente dal primo. Lo sforzo efficace rappresenta la forza intergranulare media per unità di area e non può essere determinato direttamente: esso può essere ricavato solo valutando separatamente lo sforzo totale e la pressione dei pori (Fig.1b).
Un suolo si deforma *solo se soggetto ad una variazione dello sforzo efficace* ed anche il raggiungimento delle condizioni di rottura è controllato dalle tensioni interparticellari. Per questa ragione, il principio delle tensioni efficaci è di fondamentale importanza nella meccanica dei terreni e, più in generale, nell'analisi del comportamento dei mezzi geologici.

1.2 Resistenza al taglio

Le caratteristiche di resistenza al taglio dei suoli derivano dai contatti tra le particelle, che possono trasmettere le forze normali e di taglio. In generale, questi contatti interparticellari sono essenzialmente frizionali, e così la resistenza al taglio è direttamente controllata dalle tensioni efficaci.
La Fig.1c mostra un elemento di terreno la cui resistenza è stata completamente mobilizzata sotto gli sforzi principali σ_{1f} e σ_{3f}, cioè un elemento di terreno soggetto a deformazioni plastiche elevate. Per lo stesso suolo è possibile effettuare test simili con differenti combinazioni degli stress e determinare una serie di cerchi delle tensioni a rottura.
La linee tracciate sul diagramma in modo da essere tangenti ai cerchi degli stati tensionali limite rappresentano gli *inviluppi di rottura*. Per definizione, il terreno non può sostenere alcuno stato tensionale che giace al di fuori dell’inviluppo di rottura (punto D in Fig.1c).
Per la maggior parte dei suoli, l’inviluppo di rottura è curvo ma esso viene comunemente approssimato, all’interno di un limitato intervallo di stress, dalla ben nota relazione lineare di Mohr-Coulomb:

$$\tau = c' + \sigma' \tan\phi' \qquad [2]$$

dove **c’** è la coesione e **ϕ’** è l’angolo di resistenza al taglio in termini di tensioni efficaci.

I terreni sabbiosi e ghiaiosi sono noti come *terreni incoerenti* poiché non possiedono resistenza al taglio in condizioni di confinamento nullo e la loro resistenza deriva esclusivamente dall'attrito interparticellare e dall'incastro tra le particelle.
Sottoposte a prove di taglio, le sabbie dense inizialmente dilatano (incremento di volume) e forniscono elevati valori di resistenza (*resistenza di picco*); al procedere della deformazione, la resistenza cala fino a raggiungere uno "stato stazionario" nel quale il terreno si deforma a volume costante (Fig.2a).
Le sabbie sciolte, invece, contraggono durante l'intera prova di taglio e la resistenza cresce progressivamente fino a raggiungere un valore costante, corrispondente alla condizione di deformazione a volume costante (Fig.2a).
A parità di tensione di confinamento, la condizione di volume costante raggiunta al termine della prova di taglio è la stessa indipendentemente dalla densità iniziale del campione (sabbia densa o sciolta): tale condizione è detta di *stato critico* ed i corrispondenti parametri di resistenza al taglio *parametri di resistenza allo stato critico* (Fig.2b). I principali fattori che influenzano l'angolo di attrito di picco e di stato critico sono schematicamente riportati nelle Figg.2c-2d.

I terreni argillosi sono noti come *terreni coesivi* poiché possiedono valori significativi di resistenza al taglio in condizioni di confinamento nullo. In realtà, è necessario distinguere tra coesione "vera", funzione della storia tensionale del terreno, e coesione "apparente", quale è quella che deriva, ad esempio, dalle tensioni capillari.
Valori significativi di coesione sono una prerogativa dei terreni argillosi sovraconsolidati, caratterizzati in sito da un indice dei vuoti inferiore a quello corrispondente alla tensione di confinamento agente (Fig.3a). I terreni argillosi normalconsolidati, invece, se non è presente una cementazione tra le particelle, hanno valori nulli di coesione (Fig.3b).
Analogamente ai terreni granulari, i terreni argillosi fortemente sovraconsolidati tendono a dilatare al taglio, mentre quelli normalconsolidati e debolmente sovraconsolidati tendono a contrarre (Fig.3c).

Esistono due differenze principali nel comportamento al taglio dei terreni granulari e di quelli coesivi. Innanzitutto, la permeabilità dei terreni argillosi è molto inferiore di quella dei terreni sabbiosi e ghiaiosi e questo inibisce il movimento dell'acqua interstiziale quando c'è una tendenza al cambio di volume; in altre parole, possono essere necessari tempi molto lunghi perché un terreno argilloso riequilibri un eccesso (o un difetto) di pressione interstiziale. Per tale ragione, il comportamento al taglio dei terreni argillosi viene distinto in *drenato* e *non drenato*.
Un'altra importante differenza tra terreni coesivi e granulari riguarda la forma delle particelle. I terreni argillosi hanno infatti particelle di forma tendenzialmente piatta, che tendono ad allinearsi parallelamente alla superficie di scorrimento nel caso vengano raggiunti elevati valori delle deformazioni di taglio. La resistenza al taglio diventa considerevolmente più bassa rispetto alle circostanti porzioni della massa e prende il nome di *resistenza residua*.
Tale resistenza è inferiore sia a quella di picco (che può avere valori elevati nei terreni argillosi fortemente sovraconsolidati) sia a quella di stato critico (coincidente con quella di picco nei terreni argillosi normalconsolidati): quest'ultima, infatti, rappresenta lo stato di un elemento di terreno che ha già raggiunto la condizione di rottura ma non ha subito deformazioni di taglio tali da produrre l'allineamento delle particelle argillose lungo il piano di scorrimento (Fig.3d).

1.3 Condizioni drenate e non drenate

Come accennato sopra, il movimento dell'acqua all'interno dei terreni poco permeabili risulta inibito, per cui le pressioni interstiziali possono aumentare o diminuire (rispetto al valore statico) in risposta al tentativo di contrarre o dilatare da parte del terreno. La variazione di pressione interstiziale influenza direttamente le tensioni efficaci e, quindi, la resistenza al taglio del terreno.
Nel caso che i fenomeni di carico o scarico del terreno avvengano rapidamente rispetto alla capacità di drenaggio del terreno stesso, e che le analisi siano rivolte alle condizioni di stabilità prima del riequilibrio delle pressioni interstiziali, si fa riferimento alle *condizioni non drenate* (o *condizioni a breve termine*), cioè a condizioni nelle quali il terreno è caratterizzato da valori delle pressioni interstiziali in eccesso o in difetto rispetto alla condizione di equilibrio (sovrapressioni interstiziali).
Nel caso, invece, che i fenomeni di carico o scarico del terreno avvengano lentamente rispetto alla capacità di drenaggio del terreno stesso, o che le analisi siano rivolte alle condizioni di stabilità una volta raggiunto l'equilibrio delle pressioni interstiziali, si fa riferimento alle *condizioni drenate* (o *condizioni a lungo termine*).

Dal punto di vista teorico, le analisi di stabilità possono essere effettuate in entrambi i casi in termini di tensioni efficaci. In pratica, però, risulta estremamente difficile conoscere con sufficiente precisione i valori delle *sovrapressioni interstiziali* indotte dalla variazione dello stato tensionale, per cui non appare realisticamente possibile analizzare le condizioni *a breve termine* in termini di tensioni efficaci. Tale problema, ovviamente, non sussiste nelle analisi *a lungo termine*, dal momento che in tale caso le sovrapressioni interstiziali si sono annullate e le pressioni interstiziali sono tornate all'equilibrio.
Nelle analisi a breve termine si ricorre pertanto ad un'approssimazione largamente accettata nella pratica. Visto che la resistenza di un terreno saturo è costante se il suo volume rimane costante (Fig.4a), e visto che il volume del terreno non cambia se si ammette che il drenaggio dell'acqua interstiziale sia impedito, è possibile effettuare l'analisi a breve termine in termini di tensioni totali (trascurando cioè i valori delle pressioni interstiziali) ed adottando opportuni valori dei parametri di resistenza.
Tali valori sono determinati sperimentalmente tramite prove non drenate e sono detti *parametri di resistenza in termini di tensioni totali* ($\mathbf{c_u}$, ϕ_u). Considerando un suolo a densità costante, la resistenza di taglio risulta indipendente dalla tensione di confinamento (Fig.4a) per cui l'inviluppo di rottura è approssimabile ad una retta orizzontale con parametri di Mohr-Columb $\mathbf{c_u}$ e ϕ_u=0, cioè:

$$t = c_u \qquad [3]$$

Il terreno viene quindi considerato come esclusivamente coesivo.

Nell'analisi di stabilità di un pendio, bisogna innanzitutto decidere se eseguire un'analisi in termini di tensioni totali o in termini di tensioni efficaci. La scelta deriva generalmente dalla classificazione di un problema di stabilità come *a breve termine* o *a lungo termine*.
Nel caso di versanti generati da scavi rapidi o di pendii soggetti a carichi improvvisi (sempre rispetto alla capacità di drenaggio del terreno), è necessario valutare la stabilità immediatamente dopo la variazione di stato tensionale (cioè a breve termine). Se la variazione di stato tensionale è lenta rispetto al tempo di dissipazione delle sovrapressioni dei pori, o se tale variazione è indotta da una fluttuazione naturale del livello di falda all'interno della scarpata, il problema si deve considerare a lungo termine (Fig.4b).
Alcune considerazioni a questo proposito si possono fare per i versanti di scavo:

1. le condizioni di stabilità a lungo termine sono le più critiche (il fattore di sicurezza diminuisce nel tempo sia per terreni sovraconsolidati che normalconsolidati, Fig.4c) e possono essere valutate da un'analisi in termini di tensioni efficaci.
2. Generalmente, non è necessario valutare la stabilità a breve termine o prevedere la variazione delle pressioni interstiziali nel breve termine.
3. Nel caso sia richiesta un'analisi di stabilità a breve termine (ad esempio per uno scavo temporaneo) è conveniente eseguire un'analisi in termini di tensioni totali utilizzando i parametri non drenati di resistenza. Ad ogni modo, visto che uno scavo è seguito da una riduzione delle pressioni dei pori che possono ricrescere anche velocemente, il risultato di un'analisi a breve termine deve essere trattato con cautela, specie se il terreno è interessato da fessure o piani di discontinuità (Bishop & Bjerrum, 1960). La risposta alla domanda " Quanto è lungo il breve termine ?" è discussa in dettaglio da Chandler (1984b).
4. Se le pressioni dei pori sono monitorate durante e dopo lo scavo, la valutazione delle condizioni di stabilità può essere sempre effettuata in termini di tensioni efficaci.

Considerazioni opposte possono essere effettuate nei problemi di stabilità che contemplano un sovraccarico del versante: in questi casi, le condizioni critiche di stabilità sono a breve termine se il terreno tende a contrarre al taglio (argille NC e debolmente OC), a lungo termine se il terreno tende a dilatare (argille fortemente OC).
La maggior parte dei problemi che coinvolgono versanti naturali possono essere classificati come *a lungo termine* visto che, in assenza di carichi o scavi, la rottura viene tipicamente raggiunta a seguito di variazioni graduali della pressione dei pori (ad esempio un innalzamento del livello di falda o un incremento delle tensioni tangenziali a causa di erosione al piede). Questi casi vanno analizzati in termini di tensioni efficaci.

2 Analisi di stabilità all'equilibrio limite

2.1 Generalità

Il metodo dell'equilibrio limite è di gran lunga il metodo di analisi di stabilità più utilizzato in campo geologico-tecnico. In generale, il calcolo di una soluzione all'equilibrio limite si svolge 3 fasi:

1. Si individua un meccanismo arbitrario di collasso del versante e si traccia una superficie di scorrimento di tentativo; essa può consistere di una qualsiasi combinazione di linee rette o curve assemblate tra loro in modo da riprodurre il meccanismo di rottura ipotizzato.
2. Si calcola l'equilibrio statico della massa risolvendo le forze o i momenti e calcolando la resistenza mobilizzata lungo la superficie predefinita.
3. Si esamina l'equilibrio statico rispetto ad un'altra superficie fino a trovare il cinematismo critico per il problema in esame.

In pratica, il metodo consiste nel calcolo delle forze agenti lungo una superficie di scorrimento predefinita e delle resistenze disponibili lungo la stessa superficie. La condizione di equilibrio limite è verificata quando le forze agenti uguagliano quelle resistenti: in questo caso lo stato tensionale medio lungo la superficie di scorrimento giace sull'inviluppo di rottura del terreno ed il versante si trova sul punto di collasso.
Nei pendii stabili, la resistenza mobilizzata in condizioni di equilibrio statico è minore di quella disponibile e ciò viene espresso convenzionalmente tramite un *fattore di sicurezza* **F** definito come:

$$F = \frac{resistenze.disponibili}{resistenze.mobilizzate} \qquad [4]$$

Il fattore di sicurezza del versante è quello corrispondente alla superficie di scorrimento più critica (**F** più basso) tra le varie superfici di prova.
Le resistenze disponibili sono generalmente definite dalla relazione di Mohr-Coulomb (vedi sopra) ma il metodo può essere applicando anche considerando altri criteri di rottura.

Il metodo dell'equilibrio limite si basa sulle seguenti assunzioni (Nash, 1987):

- la massa di terreno è considerata perfettamente rigida
- la rottura del versante avviene per scorrimento di una massa di terreno lungo una superficie
- al momento della rottura, la resistenza del terreno viene completamente mobilizzata lungo l'intera superficie

Tali assunzioni permettono una risoluzione agevole e rapida dei problemi di stabilità ma introducono alcune importanti limitazioni che fanno del metodo dell'equilibrio limite uno strumento insufficiente per riprodurre in dettaglio il *comportamento meccanico* del versante.

2.2 Variabili in gioco e condizioni di indeterminazione statica

Dato il pendio generale di Fig.6a, e considerando un concio di terreno posto sopra un'ipotetica superficie di scorrimento, le variabili complessivamente in gioco risultano:

W = peso totale del concio di larghezza **b** e altezza **h**
N = forza totale normale alla base del concio
S_m = forza di taglio agente (mobilizzata) alla base di ogni concio
E = forza normale interconcio
X = forza di taglio interconcio
D = carico esterno lineare
kW = carico sismico orizzontale applicato al centroide di ogni concio
A = risultante delle forze esterne dell'acqua
l = lunghezza della base del concio

α = angolo di inclinazione della base del concio
ω = angolo di inclinazione del carico lineare **D**
f = distanza tra il punto di applicazione di **N** e il centro di rotazione o dei momenti
f1 = distanza tra il punto di applicazione di **E** e il centro di rotazione o dei momenti
x = distanza orizzontale tra la linea centrale di ogni concio e il centro di rotazione o dei momenti
e = distanza verticale tra il centroide di ogni concio e il centro di rotazione o dei momenti
d = distanza perpendicolare dalla risultante di un carico esterno lineare **D** e il centro di rotazione o dei momenti
a = distanza perpendicolare dalla risultante delle forze esterne dell'acqua e il centro di rotazione o dei momenti
R = raggio di una superficie di scorrimento circolare o braccio del momento associato alla resistenza mobilizzata $\mathbf{S_m}$ per una superficie di scorrimento di forma non-circolare

Se la massa potenzialmente instabile è divisa in **n** conci, l'equazione risolutiva conterrà pertanto le seguenti incognite (Graham, 1984):

n	forze normali **N** agenti alla base del concio (la distribuzione delle pressioni interstiziali u è assunta nota)
n	forze tangenziali **Sm**
n-1	forze normali interconcio **E**
n-1	forza tangenziali interconcio **X**
n	distanze **f** tra il punto di applicazione di **N** e il centro di rotazione o dei momenti
n-1	distanze **f1** tra il punto di applicazione di **E** e il centro di rotazione o dei momenti
1	valore del Fattore di Sicurezza
6n-2	**numero totale di incognite**

Le equazioni disponibili sono quelle relative all'equilibrio statico delle forze e dei momenti, ovvero:

n	sommatoria delle forze orizzontali
n	sommatoria delle forze verticali
n	sommatoria dei momenti
n	equazione del Fattore di Sicurezza [4]
4n	**numero totale di equazioni**

Visto che il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni, il problema risulta staticamente indeterminato. Considerando, ad esempio, un massa potenzialmente instabile suddivisa in 30 conci (**n**=30), si hanno 178 incognite e 120 equazioni, per cui è necessario effettuare 2**n**-2 assunzioni (58) per rendere il problema staticamente determinato.
Un set di **n** assunzioni che può essere prontamente effettuato riguarda il punto di applicazione della forza **N** alla base del concio. Se il concio è sufficientemente sottile, infatti, si può assumere che la forza **N** sia applicata al centro della base del concio, riducendo così le incognite a 5 **n**-2. Ritornando all'esempio precedente, il numero di incognite si riduce a 148.
Il problema, comunque, rimane staticamente indeterminato, per cui è necessario introdurre delle ulteriori assunzioni per renderlo risolvibile dal punto di vista numerico. E' proprio nelle assunzioni adottate dai vari Autori (Fellenius, 1936; Bishop, 1955; Janbu et al., 1956; Spencer, 1967; Morgestern & Price, 1965; Lowe & Karafiath, 1960) che si differenziano i numerosi schemi risolutivi dell'equilibrio limite attualmente disponibili.

2.3 Formulazione dell'Equilibrio Limite Generale

Facendo ancora riferimento al caso generale di Fig.6a, e trascurando per il momento le assunzioni necessarie per rendere il problema staticamente determinato, il fattore di sicurezza viene calcolato risolvendo le seguenti equazioni della statica:

1. La somma dei momenti rispetto un punto comune per tutti i conci, che fornisce il fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio dei momenti $\mathbf{F_m}$.

2. La somma delle forze orizzontali per tutti i conci, che fornisce il fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio delle forze **F_f**
3. La somma delle forze verticali per ogni concio, che fornisce il valore della forza normale **N** alla base del concio.

Sempre riferendosi ai simboli di Fig.6a, le corrispondenti equazioni risultano (i pedici $_L$ e $_R$ si riferiscono rispettivamente al lato sinistro e destro dei conci; i termini tra parentesi quadre indicano che tali forze devono essere considerate solo per i conci dove esse agiscono):

<u>Fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio dei momenti, **F_m**</u>

considerando l'equilibrio dei momenti,

$$\sum Wx - \sum S_m R - \sum Nf + \sum kWe \pm [Dd] \pm Aa = 0 \qquad [5]$$

le resistenze disponibili **S_d** espresse dalla relazione di Mohr-Coulomb,

$$S_d = lc' + (N - ul)\tan f' \qquad [6]$$

e la formulazione generale del fattore di sicurezza **F**,

$$F = \frac{S_d}{S_m} \qquad [7]$$

si ottiene:

$$F_m = \frac{\sum (c' lR + (N - ul) R \tan f')}{\sum Wx - \sum Nf + \sum kWe \pm [Dd] \pm Aa} \qquad [8]$$

<u>Fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio delle forze, **F_f**</u>

considerando l'equilibrio delle forze orizzontali,

$$\sum (E_L - E_R) - \sum (N \,\mathrm{sen}\, \boldsymbol{a}) + \sum (S_m \cos \boldsymbol{a}) - \sum kW + [D \cos w] \pm Aa = 0 \qquad [9]$$

e considerando che la sommatoria delle forze interconcio deve essere zero se sommata sull'intera massa, si ottiene:

$$F_f = \frac{\sum (c' l \cos \boldsymbol{a} + (N - ul) \tan f' \cos \boldsymbol{a})}{\sum N \,\mathrm{sen}\, \boldsymbol{a} + \sum kW - [D \cos w] \pm A} \qquad [10]$$

Forza normale alla base del concio, **N**

considerando l'equilibrio delle forze verticali,

$$-W+(X_L-X_R)+N\cos a+S_m \operatorname{sen} a-[D \operatorname{sen} w]=0 \qquad [11]$$

e sostituendo le equazioni [6] e [7] nella [11] risolvendo per **N**, si ottiene:

$$N=\frac{W+(X_L-X_R)-\dfrac{c' l \operatorname{sen} a+ul\tan f' \operatorname{sen} a}{F}+[D \operatorname{sen} w]}{\cos a+\dfrac{\operatorname{sen} a \tan f'}{F}} \qquad [12]$$

Per il calcolo di **N** (eq. [12]) è necessario conoscere i valori delle forze di taglio interconcio $\mathbf{X_L}$ e $\mathbf{X_R}$. La procedura di calcolo è come segue:

1- calcolo della forza normale interconcio sulla base dell'equilibrio delle forze orizzontali:

$$(E_L-E_R)-N \operatorname{sen} a+S_m\cos a-kW+[D\cos w]=0 \qquad [13]$$

2- calcolo della forza di taglio interconcio sulla base della seguente espressione empirica:

$$X=E l f(x) \qquad [14]$$

dove:
λ = la percentuale (in forma decimale) della funzione usata
f(x) = una funzione arbitraria che definisce l'inclinazione della risultante delle forze interconcio lungo la superficie di scorrimento.

Come si può notare, l'equazione [12] non può essere direttamente risolta visto che contiene al suo interno il fattore di sicurezza, chiaramente incognito. Il calcolo viene quindi effettuato in modo iterativo, assegnando cioè un valore di "tentativo" al fattore di sicurezza ($\mathbf{F_t}$) e calcolando il fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio delle forze o dei momenti ($\mathbf{F_m}$ o $\mathbf{F_f}$) dalle equazioni [8] e [10] sopra riportate fino ad ottenere una soddisfacente convergenza dei risultati.

Per il calcolo della forza di taglio interconcio **X** (eq.[15]) è necessario assumere una funzione interconcio **f(x)**, che esprime l'inclinazione della risultante delle forze interconcio in funzione della distanza lungo la superficie di scorrimento.
Alcuni esempi di funzioni interconcio sono riportate in Fig.7. Il fatto che le funzioni **f(x)** siano arbitrarie e debbano essere assunte "a priori" riflette l'indeterminazione statica del problema (numero di incognite maggiore del numero di equazioni). I vari schemi risolutivi proposti si basano sul tipo di funzione interconcio considerata e, più in generale, sulle assunzioni adottate per tali forze.

2.4 Alcune soluzioni semplici

Pendio infinito

Nel metodo del pendio infinito la superficie di scorrimento è considerata piana e parallela alla superficie topografica e le condizioni meccaniche ed idrauliche sono assunte costanti lungo tutta la superficie (Fig.8a).

In queste condizioni le risultanti delle forze interconcio sono parallele al pendio, uguali in modulo, ed opposte in verso: le forze si elidono e il problema diventa staticamente determinato.
Essendo nulla la sommatoria delle forze interconcio, la tensione normale **N** può essere calcolata con l'equazione semplificata [13] e, in assenza di sovraccarichi nel versante, il fattore di sicurezza che risulta dalla sostituzione della [13] nella [10] è:

$$F = \frac{c' + (\gamma z \cos^2 \alpha - u) \tan \phi'}{\gamma z \,\mathrm{sen}\, \alpha \cos \alpha} \qquad [16]$$

dove:
γ=peso dell'unità di volume del terreno
z=profondità della superficie di scorrimento

Nel caso del pendio infinito, l'equilibrio limite fornisce gli stessi risultati che si ottengono utilizzando i teoremi della plasticità (teoremi del limite inferiore e del limite superiore; es. Atkinson, 1993), per cui la soluzione è una soluzione esatta. Negli altri casi, invece, il metodo dell'equilibrio limite fornisce soluzioni solo approssimate.
Alcune tipiche situazioni che possono essere analizzate secondo lo schema del pendio infinito riguardano (es. Day, 1994; Haneberg, 1995):

- la stabilità delle coltri eluvio-colluviali, la cui base è generalmente parallela alla superficie topografica
- la stabilità dei versanti in terreni argillosi fortemente fessurati, caratterizzati da valori trascurabili della coesione efficace
- la stabilità dei versanti in terreni granulari
- la stabilità di versanti isostrutturali in roccia nel caso che lo scivolamento planare sia cinematicamente ammissibile (presenza di discontinuità estremamente persistenti parallele al versante)

Superficie circolare in condizioni non drenate

Nel caso di un versante omogeneo in condizioni non drenate si può assumere che la rottura del versante avvenga per rotazione di un blocco rigido su una superficie cilindrica, lungo la quale viene mobilizzata la sola resistenza non drenata $\mathbf{c_u}$ (Fig.9).
Essendo la superficie di scorrimento circolare, il braccio **f** della tensione normale alla base dei conci (Fig.6a) è nullo. Trattandosi inoltre di condizioni non drenate ϕ_u=0 e l'equazione [8] relativa al calcolo del fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio dei momenti si riduce a (es. Nash, 1987):

$$F = \frac{c_u L R}{W x} \qquad [17]$$

dove:
L=lunghezza della superficie di scorrimento

L'uso dei parametri di resistenza in termini di tensioni totali implica che le pressioni dei pori e gli stress efficaci nel suolo non abbiano raggiunto la condizione di equilibrio; questo tipo di analisi, pertanto, è appropriato nel caso della valutazione a breve termine della stabilità di una scarpata. Casi tipici riguardano il calcolo della stabilità di scavi in terreni argillosi e l'analisi di versanti, sempre in terreni argillosi, soggetti a rapido sovraccarico.

Superficie circolare e non-circolare in condizioni drenate e non drenate

Come detto nella sezione precedente, il calcolo del fattore di sicurezza di un versante, ad eccezione di pochi casi particolari, è un problema staticamente indeterminato. Le assunzioni effettuate dai vari Autori per rendere il problema staticamente determinato, e quindi numericamente risolvibile, si basano tutte sulle forze interconcio. Eliminando le incognite relative alle forze interconcio, infatti, il problema diventa staticamente sovradeterminato, cioè il numero di equazioni supera il numero di incognite.

I metodi più comunemente utilizzati e le relative assunzioni sono riassunti nella tabella di Fig.10.

Lo schema del "cuneo di Coulomb" (es. Lee et al., 1983) è applicabile quando la massa potenzialmente instabile è suddivisibile in due o tre blocchi. Può essere il caso di un versante caratterizzato da un litotipo fortemente competente alla base o nel quale è presente uno strato debole che controlla la posizione della superficie di scorrimento. Una tipica applicazione di questo metodo riguarda la valutazione delle condizioni di stabilità dei paramenti delle dighe in terra a nucleo impermeabile (es. Seed & Sultan, 1967).
La massa potenzialmente instabile viene suddivisa in blocchi ed è analizzato l'equilibrio di ogni blocco. Il problema diventa staticamente determinato assumendo un'inclinazione arbitraria per la risultante delle forze interconcio.

Gli altri metodi di analisi riportati in Fig.10 (Fellenius, 1936; Bishop, 1955; Janbu et al., 1956; Spencer, 1967; Morgestern & Price, 1965; Lowe & Karafiath, 1960) sono applicabili a superfici di scorrimento circolari e/o non circolari e rappresentano diverse possibili soluzioni del metodo dell'Equilibrio Limite Generale precedentemente descritto. Come già detto, i vari metodi si differenziano tra loro per le assunzioni sulle forze interconcio e per l'uso delle forze e/o dei momenti nel calcolo dell'equilibrio statico.

Il metodo ordinario dei conci, ad esempio, considera l'equilibrio dei momenti ed ipotizza che la risultante delle forze interconcio sia parallela alla base del concio; quello di Bishop semplificato considera sempre l'equilibrio dei momenti ma assume che la risultante delle forze interconcio sia orizzontale (cioè trascura le forze di taglio interconcio). Metodi più sofisticati, quali quelli di Morgestern & Price e Janbu rigoroso soddisfano sia l'equilibrio delle forze sia quello dei momenti e considerano le forze interconcio sia di taglio sia normali.
Viste le potenzialità di calcolo oggi disponibili, l'uso degli schemi risolutivi più sofisticati non comporta più alcuna difficoltà. L'utilizzo di tali metodi è comunque condizionato alla definizione di una funzione interconcio **f(x)** significativa per il caso in esame.
In generale, l'inclinazione della risultante delle forze interconcio è funzione della posizione del concio sulla superficie di scorrimento, risultando debolmente inclinata (tendente a zero) nelle porzioni di cresta e di piede e più inclinata nella porzione centrale. Nel caso di superficie di scorrimento circolare, quindi, una funzione **f(x)** di tipo mezzo-seno può essere appropriata, mentre se la superficie di scorrimento ha una forma "composita" (porzione centrale piana) un funzione trapezoidale è più adatta. Una funzione interconcio costante è invece adatta a superfici di scorrimento essenzialmente planari.
Per una valutazione più corretta della funzione **f(x)** si può fare riferimento alla relazione empirica ricavata da Fredlund & Wilson (1986) sulla base di una serie di analisi agli elementi finiti di versanti in un mezzo elastico lineare.

Un confronto tra i diversi metodi proposti in letteratura è stata eseguito da Fredlund & Krahn (1977). Gli Autori hanno confrontato i risultati di una serie di analisi di stabilità eseguite con differenti metodi su versanti ideali, considerando un'ampia variazione della geometria del pendio, delle caratteristiche dei terreni e delle condizioni idrauliche (Fig.11).
Nel complesso, i risultati ottenuti indicano un buon accordo tra i diversi metodi e, se si esclude il metodo ordinario dei conci che fornisce risultati non soddisfacenti, la differenza nei valori del fattore di sicurezza risulta dell'ordine del 4% in tutti e sei i casi analizzati (Fig.11).
La sensitività del fattore di sicurezza rispetto alle assunzioni sulle forze interconcio è visibile nel diagramma di Fig.12, dove sono i riportati i valori del fattore di sicurezza delle forze e dei momenti in funzione del parametro λ, che definisce il rapporto tra le forze normali e di taglio agenti tra i conci.
Come si può notare, il fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio dei momenti $\mathbf{F_m}$ è scarsamente influenzato dalle assunzioni sulle forze interconcio. Nei casi considerati, infatti, le differenze tra il fattore di sicurezza ottenuto col metodo di Bishop e quello ottenuto col metodo di Morgenstern & Price sono inferiori allo 0.4%.
Al contrario, il fattore di sicurezza rispetto all'equilibrio delle forze $\mathbf{F_f}$ è molto sensibile al parametro λ e ciò implica che i metodi che usano tale approccio (Janbu semplificato, Lowe & Karafiath, ecc.) sono meno accurati del metodo di Bishop che usa solo l'equilibrio dei momenti.
Fredlund & Krahn analizzarono anche l'influenza della funzione **f(x)**, utilizzata per il calcolo delle forze interconcio nel metodo di Morgestern & Price, sul fattore di sicurezza. La tabella riportata sempre in Fig.12 mostra come il fattore di sicurezza è solo marginalmente influenzato dalla scelta di **f(x)**.
I metodi che soddisfano sia l'equilibrio delle forze sia quello dei momenti, inoltre, sono meno sensibili degli altri nei confronti della pozione del centro dei momenti, che viene arbitrariamente posizionato al di sopra del versante nel caso di superfici di scorrimento non circolari.

In sostanza, considerando anche i risultati ottenuti da altri studi comparativi sui metodi di analisi di stabilità, si può concludere che (Nash, 1987):

1. I metodi che soddisfano sia l'equilibrio delle forze sia quello dei momenti (Janbu rigoroso, Spencer, Morgenstren & Price) forniscono risultati accurati (±5%) per l'analisi dei versanti.
2. Il metodo di Bishop, che soddisfa il solo equilibrio dei momenti, fornisce risultati accurati ad eccezione del caso in cui la superficie di scorrimento sia fortemente inclinata al piede.
3. Gli altri metodi che non soddisfano tutte le condizioni di equilibrio (metodo ordinario dei conci, metodi basati sul solo equilibrio delle forze) possono fornire risultati inesatti.
4. Nei casi in cui la superficie di scorrimento sia fortemente inclinata al piede si deve utilizzare un metodo che prenda in considerazione la distribuzione delle forze interconcio (es. Morgenstern & Price).

2.5 Commenti sul fattore di sicurezza

Nell'analisi della stabilità dei versanti, il fattore di sicurezza ha tradizionalmente avuto alcune funzioni particolari:

1. Prendere in considerazione le incertezze sui parametri di resistenza al taglio (vista la variabilità dei terreni naturali) e sulla relazione tra le resistenze determinate in laboratorio e quelle effettivamente disponibili in sito.
2. Prendere in considerazione le incertezze sui carichi in gioco nel versante (carichi superficiali, peso dell'unità di volume dei terreni, pressione dei pori).
3. Prendere in considerazione l'effettiva rappresentatività del modello, cioè:
    a) la possibilità che il meccanismo critico di rottura sia leggermente differente da quello individuato nell'analisi;
    b) che il modello non sia conservativo
4. Assicurarsi che le deformazioni del versante rimangano entro limiti accettabili.

Il fattore di sicurezza, comunque, non può "tamponare" grossi errori, ad esempio il fatto di non aver rilevato la presenza di una superficie di rottura preesistente all'interno nel versante.
Come è stato sottolineato da diversi Autori (es. De Mello, 1977), un fattore di sicurezza di 1.0 non indica necessariamente che la rottura del versante è imminente. Il fattore di sicurezza reale è fortemente influenzato da dettagli geologici minori, dalla relazione sforzo-deformazione del suolo, dalla distribuzione delle pressioni interstiziali, dallo stato tensionale in sito, dalla rottura progressiva a da numerosi altri fattori.
Pur essendo pratica comune eseguire un'analisi deterministica, è spesso utile includere nei calcoli uno studio sulla variabilità del fattore di sicurezza in funzione delle incertezze esistenti nei vari parametri in gioco.
Il modo più semplice è quello di calcolare il valore del fattore di sicurezza per diversi valori di c' e ϕ', in modo tale da riprodurre il livello di confidenza con il quale essi sono conosciuti o il loro diverso grado di mobilizzazione in funzione della deformazione. Se, invece, la variabilità dei parametri dei materiali e delle pressioni dei pori può essere espressa statisticamente, un'analisi di tipo probabilistico porta alla valutazione della probabilità di rottura (es. Lee et al., 1983; Alonso, 1976).
In generale, comunque, l'area di maggior incertezza riguarda la scelta di un appropriato meccanismo di rottura. La presenza di dettagli geologici minori, infatti, quale un sottile livello di terreno a scadenti proprietà meccaniche o di un piano di discontinuità sfavorevolmente orientato per la stabilità, può controllare le condizioni di stabilità del versante e se non viene direttamente riconosciuto durante le indagini porterà sicuramente ad errori grossolani nel calcolo di F.

2.6 Problemi di instabilità numerica

Nel calcolo di una soluzione all'equilibrio limite, ci si può imbattere in alcuni problemi di instabilità numerica.
I problemi riguardano valori non realistici del denominatore dell'equazione [12] (calcolo della tensione normale **N**), generalmente indicato come $\mathbf{m_\alpha}$:

$$m_\alpha = \cos\alpha + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\,\tan\phi'}{F} \qquad [18]$$

La variabile $\mathbf{m}_\alpha$ è funzione dell'inclinazione della base del concio α e del rapporto $\tan\phi'/F$, come mostrato in Fig.13. I problemi di calcolo sorgono quando $\mathbf{m}_\alpha$ è piccolo o nullo e **N** tende all'infinito.
Tale situazione si verifica se α è negativo (base del concio in contropendenza) e $\tan\phi'/F$ è grande o se α è grande (concio molto inclinato) e $\tan\phi'/F$ è piccolo. Valori estremi del fattore di sicurezza si ottengono anche quando $\mathbf{m}_\alpha$ è negativo (**N** risulta negativo e il fattore di sicurezza viene sottostimato).
I problemi associati con il valore di $\mathbf{m}_\alpha$ dipendono essenzialmente da una forma non corretta della superficie di scorrimento.
Per ovviare a questo problema si può fare riferimento alla teoria classica della spinta delle terre, che permette di definire una forma ragionevole delle porzioni di monte e valle della superficie di rottura. L'inclinazione della superficie di scorrimento nella zona di rottura passiva (al piede) dovrebbe essere limitata dalla massima obliquità dello stato passivo (Fig.13), cioè (es. Lancellotta, 1987):

$$\alpha = \frac{\phi'}{2} - 45 \qquad [19]$$

Analogamente, l'inclinazione della superficie di scorrimento nella zona di rottura attiva (in testa) non dovrebbe superare il valore limite dello stato attivo:

$$\alpha = \frac{\phi'}{2} + 45 \qquad [20]$$

Queste soluzioni risolvono generalmente i problemi di $\mathbf{m}_\alpha$. La zona attiva può anche essere combinata con una *tension crack* verticale se è necessario attribuire un'inclinazione molto elevata alla porzione di monte della superficie di scorrimento.
Spetta all'utente del programma di calcolo verificare che l'inclinazione dei conci nelle porzioni di monte e di valle non violi le condizioni espresse dalla teorie della spinta delle terre. Se ciò si verifica, il fattore di sicurezza può risultare errato.

2.7 Limiti e accuratezza del metodo

Un'analisi di stabilità <u>esatta</u> dovrebbe risolvere contemporaneamente le condizioni di equilibrio e di compatibilità in tutti i punti della massa. Le condizioni che dovrebbero essere rispettate sono (Nash, 1987; Atkinson, 1993):

1. Ogni punto all'interno della massa deve essere in equilibrio.
2. Gli sforzi all'interno del terreno devono essere in equilibrio con quelli applicati sulla superficie.
3. Le deformazioni che avvengono in un punto devono essere compatibili con le deformazioni di tutti i punti circostanti.
4. Le deformazioni in ogni punto del terreno devono essere legate agli sforzi da un'appropriata relazione sforzo-deformazione.
5. Il criterio di rottura del terreno (es. Mohr-Coulomb) non deve essere violato in nessun punto della massa.

Confrontando tali condizioni con le assunzioni proprie del metodo dell'equilibrio limite, emergono subito le principali limitazioni di tale metodo:

- Le condizioni di equilibrio statico (punti 1 e 2) sono soddisfatte tra i blocchi ma lo stato tensionale <u>all'interno</u> dei singoli blocchi non viene calcolato.

- La condizione di compatibilità delle deformazioni (punti 3 e 4) non è verificata. La massa, infatti è considerata perfettamente rigida e le deformazioni del terreno non vengono calcolate.

- La mancata conoscenza dello stato tensionale in tutti i punti della massa non permette di verificare se, localmente, è violato il criterio di rottura del terreno (punto 5).

Quanto tali limitazioni influiscono sull'accuratezza del risultato ?

Chen (1975) confrontò i risultati di analisi all'equilibrio limite di versanti secchi in terreni omogenei con i risultati ottenuti dalla teoria della plasticità (teorema del limite superiore). Il confronto indicò un buon accordo tra i due metodi di analisi, con differenze massime dell'ordine del 15% nei casi in cui la superficie di scorrimento critica passava sotto il piede del versante.
Simili conclusioni furono ottenute da Duncan & Wright (1980). Gli Autori effettuarono uno studio parametrico di versanti omogenei e trovarono che il metodo di Bishop (equilibrio dei momenti) ed i metodi che soddisfano tutte le condizioni di equilibrio (forze e momenti) forniscono valori del fattore di sicurezza che sono entro il 5% del valore ottenuto usando un'analisi al limite superiore su superficie a spirale logaritmica (Rendulic, 1935).
Un caso in cui l'equilibrio limite fornisce una soluzione esatta è, invece, quello del pendio infinito. Come già detto, infatti, i risultati che si ottengono in questo semplice caso sono uguali a quelli calcolati coi teoremi del limite inferiore e del limite superiore.

Sempre basandosi sui teoremi della plasticità, si dimostra che i meccanismi di rottura compatibili, cioè la forma che le superfici di scorrimento devono avere per non violare il principio di compatibilità delle deformazioni, devono risultare dalla combinazione dei seguenti elementi (es. Atkinson, 1993):

<u>condizioni drenate</u>: - superficie piana
- superficie a spirale logaritmica

<u>condizioni non drenate</u>: - superficie piana
- superficie circolare

Ad ogni modo, gli studi pubblicati indicano che gli errori connessi all'incompatibilità delle deformazioni sono ridotti, e comunque trascurabili rispetto alle incertezze insite nella determinazione delle resistenze dei terreni o nella ricostruzione delle condizioni idrauliche del versante.

A scapito delle limitazioni sopra esposte, e sebbene non esista una dimostrazione teorica del fatto che il metodo dell'equilibrio limite porta a soluzioni corrette, l'esperienza ha dimostrato che il metodo fornisce soluzioni che concordano abbastanza bene con le osservazioni dirette di collasso dei versanti naturali ed artificiali (Atkinson, 1993). Per tale ragione, l'equilibrio limite è ormai comunemente accettato come un metodo di calcolo "affidabile" nell'ambito dell'ingegneria geotecnica e della geologia applicata.

Per un'analisi più accurata delle condizioni di stabilità di un versante, che contempli cioè la valutazione degli sforzi e delle deformazioni all'interno della massa, è necessario utilizzare altri metodi di calcolo, quali i metodi alle differenze finite o agli elementi finiti (es. Hughes, 1987; Brady & Lorig, 1991). Le accresciute potenzialità di calcolo automatico rendono oggi ampiamente accessibile l'uso di tali metodi di analisi, che permettono di valutare in dettaglio la risposta tenso-deformativa del versante ad una qualsiasi variazione di stato tensionale, sia esterna sia interna al modello stesso.
Bisogna però sottolineare che tali metodi di calcolo richiedono una conoscenza più approfondita delle caratteristiche del terreno rispetto a quanto richiesto dai metodi più semplici, risultando ragionevolmente applicabili solo nei casi in cui le indagini in sito e le prove di laboratorio siano effettivamente complete. Talvolta poi, anche a fronte di un accurato piano di indagini, non è possibile caratterizzare il terreno con la precisione necessaria per l'analisi: basti pensare alle difficoltà insite nella definizione di un'appropriata legge sforzo-deformazione di terreni strutturalmente o litologicamente complessi.

2.8 Alcuni casi particolari

Pendio infinito con moto di filtrazione a direzione variabile

La Fig.14 riporta il caso di un pendio infinito all'interno del quale si ha un moto di filtrazione dell'acqua inclinato di un certo angolo λ rispetto alla normale alla superficie freatica (Iverson, 1990; Iverson et a., 1997). La pressione dell'acqua sulla superficie di scorrimento ($\mathbf{u_A}$; Fig.14) risulta dalla somma della componente *idrostatica* con quella indotta dalla *pressione di filtrazione* e, può essere calcolata considerando che l'altezza totale di pressione (**h**) nei due punti A e B (Fig.14) deve essere uguale visto che i due punti giacciono sulla stessa linea equipotenziale:

$$h_A = h_B$$

Prendendo un arbitrario piano di riferimento z=0 si esprimere l'altezza totale come somma dell'altezza geometrica e dell'altezza di pressione, trascurando il termine cinematico:

$$z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w}$$

e visto che il punto B si trova sulla superficie freatica, $\mathbf{u_B}$=0 da cui:

$$u_A = (z_B - z_A)\gamma_w$$

$$u_A = \gamma_w d_w \left(1 - \frac{\tan(\lambda + \theta - 90)}{\tan(90 - \theta) + \tan(\lambda + \theta - 90)} \right) \qquad [21]$$

dove:
d_w= altezza della superficie freatica misurata lungo la verticale

Considerando per semplicità un peso dell'unità di volume costante sia sopra chesotto falda, il fattore di sicurezza può essere calcolato dalla [16]:

$$F = \frac{c' + (\gamma z \cos^2 \alpha - u_A) \tan \phi'}{\gamma z \,\mathrm{sen}\, \alpha \cos \alpha} \qquad [22]$$

Il termine critico nell'espressione del fattore di sicurezza è rappresentato dalla pressione dei pori $\mathbf{u_A}$:

- Per valori di λ<(90-**θ**) il flusso è diretto verso l'alto (Fig.14). Il termine tra parentesi nell'equazione [21] fornisce valori maggiori di 1 e la pressione dei pori sulla superficie di scorrimento risulta più elevata di quella idrostatica ($\mathbf{u_A}$>$\mathbf{d_w}$). Il fattore di sicurezza diminuisce ed il versante risulta meno stabile.

- Per valori di λ>(90-**θ**) il flusso è diretto verso il basso (Fig.14). Il termine tra parentesi nell'equazione [21] fornisce valori minori di 1 e la pressione dei pori sulla superficie di scorrimento risulta più bassa di quella idrostatica ($\mathbf{u_A}$<$\mathbf{d_w}$). Il fattore di sicurezza aumenta ed il versante risulta più stabile.

L'influenza della direzione delle linee di flusso sul fattore di sicurezza è chiaramente visibile nel grafico di Fig.15, dove sono riportati i risultati relativi ad un caso ideale di pendio infinito con falda a piano campagna, inclinazione θ=15° e terreno puramente attritivo (ϕ'=25°).
Come si può notare, un moto di filtrazione diretto verso l'alto determina un forte abbassamento di **F**, risultando così critico per la stabilità del versante. La linea a **F**=0 rappresenta il caso limite di annullamento delle tensioni efficaci, cioè il raggiungimento di una condizione di *liquefazione per gradiente idraulico*.

Nel caso particolare di terreno puramente attritivo (**c'**=0), falda a piano campagna ($\mathbf{d_w}$=**z**) e filtrazione parallela al versante (λ=90°), la [22] si riduce a:

$$F = \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma} \right) \frac{\tan \phi'}{\tan \alpha} \qquad [23]$$

In queste condizioni (che possono corrispondere, ad esempio, ad un versante costituito da una coltre di alterazione poggiante su substrato impermeabile) il pendio risulta stabile solo per inclinazioni minori di **ϕ'**/2 circa:

$$\alpha_{\lim} \cong \frac{\phi'}{2}$$

con ϕ' che assume spesso i valori di stato critico o di stato residuo (es. Bjerrum, 1967; Skempton, 1970).

Stabilità di un versante sommerso

Nel caso di un versante sommerso si dimostra che, dato un concio di altezza **z** e larghezza **b** posto ad una profondità **p** dal pelo dell'acqua (Fig.16), la risultante delle forze dell'acqua (**F**$_w$) che agiscono sui lati del concio è verticale ed è uguale a (Lambe & Whitman, 1969):

$$F_w = zbg_w \qquad [24]$$

Considerando una superficie di scorrimento piana (così da escludere le forze interconcio) il fattore di sicurezza può essere così calcolato:

<u>Forze in gioco:</u>

Forza peso $W = bzg$

Forza esercitata dall'acqua $F_w = zbg_w$

<u>Componenti normale e tangenziale:</u>

$$N = bzg\cos a - bzg_w\cos a = bzg'\cos a$$

$$T = bzg\,\mathrm{sen}\,a - bzg_w\,\mathrm{sen}\,a = bzg'\,\mathrm{sen}\,a$$

$$F = \frac{c' + (g' z\cos^2 a)\tan f'}{g' z\,\mathrm{sen}\,a\cos a} \qquad [25]$$

dove:

$g' = g - g_w$ peso immerso dell'unità di volume

Nel caso di materiale puramente attritivo (**c'**=0) la [25] si riduce a:

$$F = \frac{\tan f'}{\tan a} \qquad [26]$$

per cui l'angolo di pendenza limite del versante risulta esattamente pari all'angolo di attrito:

$$a_{\lim} = f'$$

In un pendio sommerso, quindi, l'angolo di pendenza limite è pressoché uguale a quello corrispondente ad un versante secco e circa doppio a quello di un versante saturo con falda a piano campagna (in moto parallelo al versante).

In un caso più generale di scorrimento secondo una superficie non-planare, il calcolo del fattore di sicurezza può essere effettuato utilizzando uno degli schemi risolutivi proposti in letteratura e precedentemente discussi.

E' bene comunque osservare alcuni accorgimenti.

a. visto che alcuni conci saranno costituiti in parte da terreno ed in parte da acqua, alcune imprecisioni potrebbe derivare dall'attribuzione di elevati valori delle forze di taglio interconcio: l'acqua, infatti, non trasmette sforzi di taglio. Per ovviare a tale problema si può utilizzare un metodo che non consideri le forze di taglio interconcio (Bishop semplificato, Janbu semplificato) od utilizzare un metodo più sofisticato (es. Morgestern & Price) scegliendo però una funzione interconcio adatta, quale quella mezzo-seno.

b. Il metodo ordinario dei conci, che trascura di fatto le forze interconcio, nel caso di pendio sommerso fornisce valori del tutto errati e non deve essere utilizzato.

c. Nel caso di pendio completamente sommerso e posto ad elevata profondità del pelo dell'acqua, possono sorgere dei problemi numerici nei conci più inclinati, per i quali la pressione dell'acqua può risultare maggiore della componente normale alla base del concio. Per ovviare a questo problema si consiglia di eseguire l'analisi introducendo il peso immerso dell'unità di volume ed escludendo l'acqua.

2.9 Analisi di stabilità "a ritroso"

Il calcolo della stabilità di un versante è basato sul confronto tra le forze resistenti e quelle agenti lungo una determinata superficie di scorrimento. Al momento della rottura (**F**=1), la posizione e la forma della superficie critica dipendono dalla geometria del versante, dalle condizioni idrauliche, dalle caratteristiche fisico-meccaniche dei terreni e dagli eventuali carichi esterni applicati.
Pertanto, se è nota la posizione della superficie di scorrimento di un versante in frana, la geometria del versante e le caratteristiche dei terreni, è possibile calcolare le condizioni idrauliche che hanno portato il versante a rottura: vi sarà infatti una sola posizione della falda che soddisfa la condizione di equilibrio limite per quella particolare superficie di scorrimento. Analogamente, si possono stimare le resistenze del terreno se sono note le altre variabili (condizioni idrauliche e geometria del versante).
Analisi di questo tipo vengono dette analisi "a ritroso" e consistono, in sostanza, nello studio delle condizioni meccaniche ed idrauliche che hanno portato un versante a rottura. A differenza delle analisi di stabilità precedentemente discusse, nelle analisi "a ritroso" il fattore di sicurezza **F** non è l'oggetto del calcolo ma è un valore noto, risultando teoricamente uguale a 1 in un versante a rottura.

Le analisi "a ritroso" prevedono innanzitutto la ricostruzione del versante pre-frana, ovvero la definizione della situazione topografica al momento della rottura. Questo non è generalmente un problema se il versante mostra segni incipienti di instabilità ma non ha ancora subito variazioni significative di geometria, ma può risultare difficoltoso nei casi in cui l'analisi "a ritroso" sia rivolta ad un fenomeno franoso già avvenuto e per il quale non è disponibile una topografia di dettaglio del versante pre-frana.
Nota la geometria del versante al momento della rottura, l'analisi "a ritroso" può procedere in modi differenti a secondo dell'oggetto dell'analisi, generalmente rivolta alla determinazione delle resistenze dei terreni in sito o alla valutazione delle condizioni idrauliche critiche.
L'utilizzo forse più comune delle analisi "a ritroso" riguarda, comunque, la stima delle resistenze effettivamente disponibili in sito per terreni complessi. Si tratta soprattutto di terreni granulari debolmente cementati, terreni coesivi fessurati e formazioni litologicamente e/o strutturalmente complesse che per una serie di difficoltà sia pratiche sia teoriche non sono caratterizzabili con le usuali tecniche di indagine in sito ed in laboratorio (es. Chandler 1984a-1984b; Bishop & Little, 1967). Per tali mezzi geologici, le analisi " a ritroso" possono fornire una stima delle resistenze disponibili che, per quanto indiretta, permette di effettuare ipotesi ragionevoli sui parametri effettivamente disponibili in sito.
Di seguito vengono brevemente descritte alcune tecniche di analisi "a ritroso" comunemente utilizzate a questi scopi. Ancora una volta, si rimanda alla letteratura specifica per i necessari approfondimenti (es. Li & Zao, 1984; Nash, 1987; Sauer & Fredlund, 1988).

2.9.1 Stima delle resistenze mobilizzate

1. Versante singolo: metodo dell'inviluppo di resistenza

Nota la geometria del versante e le condizioni idrauliche al momento della rottura, il primo passo consiste nella scelta di una coppia di valori arbitrari **c'**, **ϕ'** e nel calcolo del fattore di sicurezza di un certo numero di superfici di scorrimento.
Noti i valori dello sforzo di taglio medio τ_m agente su ogni superficie (ricavabili, ad esempio, dal rapporto momento ribaltante/raggio*lunghezza dell'arco nel metodo di Bishop) e considerando che:

$$t_m = \frac{c' + s'_m \tan f}{F}$$

si calcolano per ogni superficie i valori dello sforzo normale efficace σ'_m.

Le coppie di valori σ'_m, τ_m sono indipendenti dai parametri di resistenza al taglio assunti e possono essere diagrammati nel piano τ-σ degli stress (Fig.18). La linea curva che racchiude i punti è detta *inviluppo di resistenza* (Kenney, 1967) e le linee tangenti a questo inviluppo definiscono i parametri mobilizzati di resistenza c'/F e tanϕ'/F.
In questo modo, se il versante è in frana e la superficie di scorrimento è nota, è possibile individuare sull'inviluppo di resistenza il punto σ'_m, τ_m corrispondente alla superficie di rottura e calcolare i parametri **c'**, **ϕ'** mobilizzati sulla base del rapporto tra i parametri della retta tangente all'inviluppo ed il fattore di sicurezza.

2. Analisi di più fenomeni franosi

Nel caso siano disponibili un numero significativo di fenomeni franosi (almeno 8-10) in una formazione relativamente omogenea, è possibile stimare le resistenze effettivamente disponibili in sito tramite analisi "a ritroso" dei fenomeni individuati.
Per ciascun fenomeno franoso devono essere noti la geometria del versante e le condizioni idrauliche al momento della rottura oltre, naturalmente, alla posizione della superficie di scorrimento.
L'analisi consiste nel valutare, per ogni fenomeno franoso, lo stato tensionale medio σ'_m, τ_m agente sulla superficie di scorrimento. Un'approssimazione ragionevole di tale coppia di valori può essere ottenuta dall'intersezione dei due inviluppi di resistenza corrispondenti ai casi estremi di **c'**=0, **ϕ'**=ϕ_f e **c'**=c_f, **ϕ'**=0, dove ϕ_f e c_f sono rispettivamente i valori dell'angolo di attrito e della coesione che forniscono **F**=1 nei due casi considerati.
Diagrammati nel piano τ-σ degli stress (Fig.19), i punti σ'_m, τ_m si dispongono (se la formazione è sufficientemente omogenea) lungo un inviluppo rettilineo, i cui parametri rappresentano i parametri di resistenza al taglio effettivamente disponibili in sito (es. Chandler, 1984a).

2.9.2 Stima delle condizioni idrauliche a rottura

Nel caso siano noti i parametri di resistenza del terreno, l'analisi "a ritroso" può essere finalizzata alla valutazione delle condizioni idrauliche che hanno portato il versante a rottura.
Generalmente, l'analisi è condotta determinando le coppie di valori **c'**, **ϕ'** che forniscono **F**=1 per diverse altezze di falda o diversi valori del coefficiente r_u. I valori ottenuti sono riportati in un diagramma **c'**, **ϕ'** come curve dei valori possibili dei parametri di resistenza per diverse condizioni idrauliche.
Infine, riportando sul diagramma i valori reali di resistenza del terreno ottenuti da prove in sito o in laboratorio, si individuano le condizioni idrauliche più probabili al momento della rottura. Queste sono definite dall'intersezione del campo dei valori reali con le curve **c'**, **ϕ'** relative alle varie condizioni idrauliche.

Analisi "a ritroso" più complesse possono includere la presenza di carichi esterni o di sollecitazioni dinamiche. In quest'ultimo caso, ad esempio, lo scopo dell'analisi può essere la stima del carico sismico che ha portato il versante a rottura o, noto questo, le resistenze disponibili in condizione di sollecitazione dinamica.

In generale, le analisi "a ritroso" risentono delle limitazioni già espresse per le analisi all'equilibrio limite. Nel caso particolare della stima indiretta delle resistenze disponibili, poi, un peso molto rilevante sulla significatività dei risultati è dato dalla corretta ricostruzione delle condizioni idrauliche esistenti nel versante al momento della rottura. Viste le incertezze generalmente associate a tale ricostruzione è buona norma effettuare in ogni caso analisi "a ritroso" di tipo parametrico, considerando cioè un'ampia variabilità delle condizioni imposte, e presentare i risultati come un intervallo di valori significativi piuttosto che come valori puntuali.

3 Bibliografia

Alonso E.E. (1976) – *Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays*. geotechnique, 26, 3, 453-472.

Atkinson J. (1993) – *The mechanics of soils and foundations*. McGraw-Hill, 337 pp.

Bishop A.W. (1955) – *The use of the slip circle in the stability analysis of slopes*. Geotechnique, 5, 7-17.

Bishop A.W. & Bjerrum L. (1960) – *The relevance of the triaxial test to the solution of stability problems*. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils. Colorado, 437-501.

Bishop A.W. & Morgestern N.R. (1960) – *Stability coefficiente for earth slopes*. Geotechnique, 10, 129-150.

Bishop A.W. & Little A.L. (1967) - *The Influence of the Size and Orientation of the Sample on the Apparent Strength of the London Clay at Maldon, Essex*. Proceedings of the Geotechnical Conference Oslo 1967, 1: 89-96.

Bjerrum L. (1967) – *Progressive failure of slopes in over-consolidated plastic clay and clay shales*. ASCE, Jour. SMFE, 93, 5, 3-49.

Boore D.M., Joyner W.B. & Fumal T.E. (1993) – *Estimation of response spectra and peak accelerations from western North American eartquakes: an interim report*. Open-File Report 93-509, USGS, 72 pp.

Brady B. & Lorig L. (1988) – *Analysis of rock reinforcement using finite difference methods*. Computer & Geotechnics, 5(2), 123-149.

Campbell K.W. (1981) – *Near source attenuation of peak horizontal acceleration: a ten-year perspective*. Earthquake Spectra, 1, 4, 759-804.

Campbell K.W & Bozorgnia Y. (1994) – *Near-source attenuation of peak horizontal acceleration from worldwide accelerograms recorded from 1957 to 1993*. Proc. 5th Conf. on Earthquake Engineering, Berkeley, 1, 283-292.

Chen W.F. (1975) – *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier.

Chandler R.J. (1984a) - *Recent European Experience of Landslides in Over-consolidated Clays and soft rocks*. Proc. IV International Symposium on Landslides, Toronto, 16-21 September, 1984: 61-81.

Chandler R.J. (1984b) - *Delayed Failure and Observed Strengths of First-time Slides in Stiff Clays: a Review*. Proc. IV International Symposium on Landslides, Toronto, 16-21 September, 1984: 19-25.

Chandler R.J. & Apted J.P. (1988) - *The effect of weathering on the strength of London Clay*. Quarterly Journal of Eng. Geol., 21: 59-68.

Charles J.A. & Soares M.M. (1984) – *Stability of compacted rockfill slopes*. Geotechnique, 34, 61-70.

Cousins B.F. (1978) – *Stability charts for simple earth slopes*. ASCE, J. Geotech. Eng. Div., 104, 267-279.

Day R.W. (1994) – *Surficial stability of compacted clay: case study*. ASCE, Journal of Geotechnical Engineering, 120, 11, 1980-1990.

Das B.M. (1983) – *Advanced Soil Mechanics*. McGraw-Hill, 511 pp.

De Mello V.F.B. (1977) – *Reflections on design decisions of practical significance to embakment dams*. Geotechnique, 27, 279-355.

Duncan J.M. & Wright S.G. (1980) – *The accuracy of equilibrium methods of slope stability analysis*. Proc. Int. Symp. on Landslides, New Delhi.

Elmi C. (1994) – *Frane nei flysch dell'Appennino emiliano-romagnolo*. In: "Fenomeni franosi e centri abitati", Programma Speciale SCAI. Atti Convegno di Bologna, 155-170.

Fellenius W. (1936) – *Calculation of stability of earth dams*. Trans. 2nd INt. Congr. Large Dams, 4, 445.

Fredlund F.K. & Krahn J. (1977) – *Comparison of slope stability methods of analysis*. Canadian Geotechnical Journal, 14, 429-439.

Fredlund F.K. & Wilson G.W. (1986) – *An interslice force function for limit equilibrium slope stability analysis*. Canadian Geotechnical Journal, 23, 3, 287-296.

Ginson R.E. & Morgestern N.R. (1962) – *A note on the stability of cuttings in normally-consolidated clays*. Getechnique, 12, 212-216.

Graham J. (1984) – *Methods of stability analysis*. In: "Slope Instability", Brundsen D. & Prior D.B. eds., John Wiley & Sons, 171-215.

Grunert J. (1980) – *Geomorphologie der schichtstufen am westrand des Mrzuk-Beckens (zentrale Sahara)*. Relief, Boden, Palaoklima.

Haneberg W.C. (1995) – *Groundwater flow and the stability of heterogeneous infinite slopes underlain by impervious substrata*. Geological Society of America, 10, 63-77.

Hoek E. & Bray J.W. (1977) – *Rock slope engineering*. Inst. of Min. and Met., London, 402 pp.

Holtz R.D. & Kovacs W.D. (1981) – *An introduction to geotechnical engineering*. Prentice-Hall, 733.

Hughes T.J.R. (1987) – *The finite element method*. Prentice-Hall, 803 pp.

Hunter J.H. & Schuster R.L. (1968) – *Stability of simple cutting in normally consolidated clays*. Geotechnique, 18, 372-378.

Iverson R.M. (1990) – *Groundwater flow fields in infinite slopes*. Geotechnique, 40, 139-143.

Iverson R.M., Reid M.E. & LaHusen R.G. (1997) – *Debris flow mobilization from landslides*. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 25, 85-138.

Janbu N. (1954) – *Stability analysis of slopes with dimensionless parameters*. Harvard Soil Mechanics Sries, 46, 811 pp.

Janbu N., Bjerrum L. & Kjaernsli B. (1956) – *Soil mechanics applied to some engineering problems*. Norwegian Geotechnical Institute, 16.

Kenney T.C. (1967) – *Shear strength of soft clay*. Proc. Geotech. Conf., Oslo, 2, 49-55.

Kezdi A. (1974) – *Soil physics*. Handbook of Soil Mechanics, Elsevier, 294 pp.

Kramer S.L. (1996) – *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice-Hall, 642 pp.

Lambe T.W. & Whitman R.V. (1969) – *Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, 553 pp.

Lancellotta R. (1987) – *Geotecnica*. Zanichelli, 531 pp.

Lee I.K., White W. & Ingles O.G. (1983) – *Geotechnical Engineering*. Pitman, 508 pp.

Li T.D. & Zao Z.S. (1984) – *A method of back-analysis of the shear strength parameters for first-time slide of the slope of fissured clay*. Proc. 4th Int. Symp. on Landslides, Canada, 2, 127-129.

Love J. & Karafiath L. (1960) – *Stability of earth dams upon drawdown*. Proc. 1st Int. Panamerican Conf., SMFE, Mexico, 2, 537-552.

Morgestern N.R. (1963) – *Stability charts for earth slopes during rapid drawdown*. Geotechnique, 13, 121-132.

Morgestern N.R. & Price V.E. (1965) – *The analysis of the stability of generalised slip surfaces*. Geotechnique, 15, 79-93.

Mitchell J.K. (1976) – *Fundamentals of Soil Behavior*. John Wiley & Sons, 422 pp.

Nash D. (1987) – *A comparative revie of limit equilibrium methods of stability analysis*. In: "Slope Stability", Anderson M.G. & Richards K.S. eds., John Wiley & Sons, 11-75.

Noverraz F. (1996) – *Sagging or deep-seated creep: fiction or reality ?* Proc. Int. Conf. on Landslides, Throndheim, 821-834.

O'Connoe M.J. & Mitchell R.J. (1977) – *An extension of the Bishop and Morgestern slope stability charts*. Canadian Geotechnical J., 14, 144-151.

Parry R.H.G. (1995) – *Mohr circles, stress paths and geotechnics*. E & FN Spon, 230 pp.

Pellegrini M. & Tosatti G. (1982) – *Alcuni esempi di frane determinate da sismi nell'alto Appennino modenese e reggiano*. Atti Soc. Nat. Mat. Università di Modena, 113.

Rendulic L. (1935) – *Ein beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit*. Der Bauingenieur, 19/20.

Sabetta F. & Pugliese A. (1995) – *Estimation of response spectra and simulation of nonstanotionary earthquakes ground motions*. Servizio Sismico Nazionale, Rapporto Tecnico, 95/2.

Sauer E.K. & Fredlund D.G. (1988) – *Effective stress, limit equilibrium back-analysis of failed slopes: guidelines*. Proc. 5th Symp. on Landslides, Lausanne, 763-770.

Schmertmann J.H. (1977) – *Interpretating the dynamics of the standard penetration test*. Univ. of Florida, Gainesville (USA).

Seed H.B. & Sultan H.A. (1967) – *Stability analysis for a sloping core embankment*. ASCE, Jour. SMFE, 93, 69-83.

Skempton A.W. (1964) – *Long term stability of clay slopes*. Geotechnique, 14, 2, 77-102.

Skempton A.W. (1970) - *First-time slide in over-consolidated clays*. Geotechnique, 20: 320-324.

Spencer E. (1967) – *A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces*. Geotechnique, 17, 11-26.

Taylor D.W. (1948) – *Fundametals of soil mechanics*. Wiley, New York.

Terzaghi K. (1936) – *Relation between soil mechanics and foundation engineerig*. Proc. 1st Int. Conf. on Soil Mechanics Found. Eng., Cambridge, 3, 13-18.

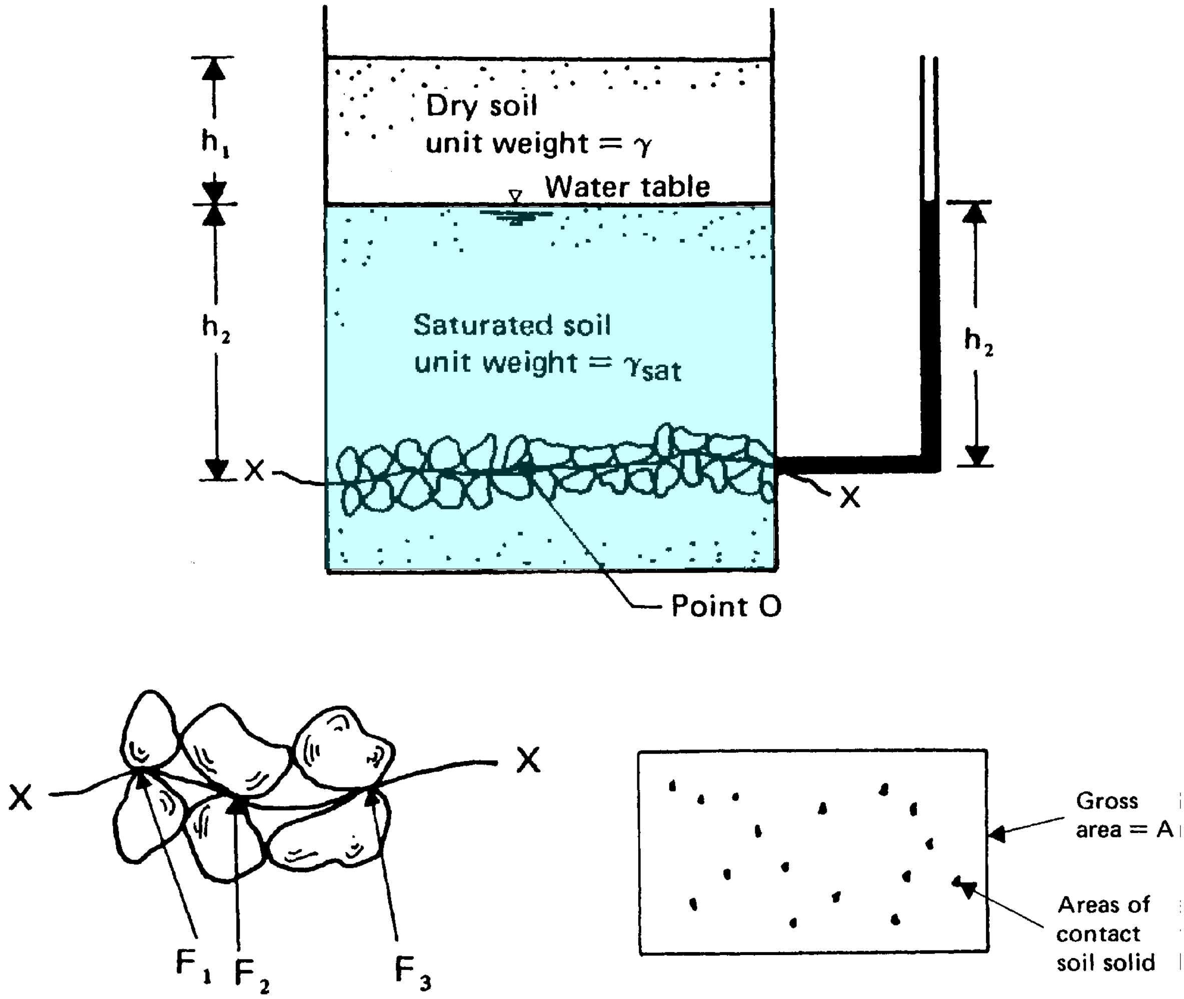
Trifunac M.D. & Brady A.G. (1975) – *On the correlation of seismic intensity scales with peak of recorded strong motion*. Bull. Seismological Soc. of America, 65, 1, 139-162.

Youngs R.R., Day S.M. & Stevens J.L. (1988) – *Near field ground motion on rock for large subduction earthquakes*. Proc. Earthquake and Soil Dynamics II, Geotechnical Special Pubblication 20, ASCE, 445-462.

APPENDICE

Lucidi proiettati nel corso

Principio delle tensioni efficaci



$$F = F_s + F_w - F_A + F_R$$

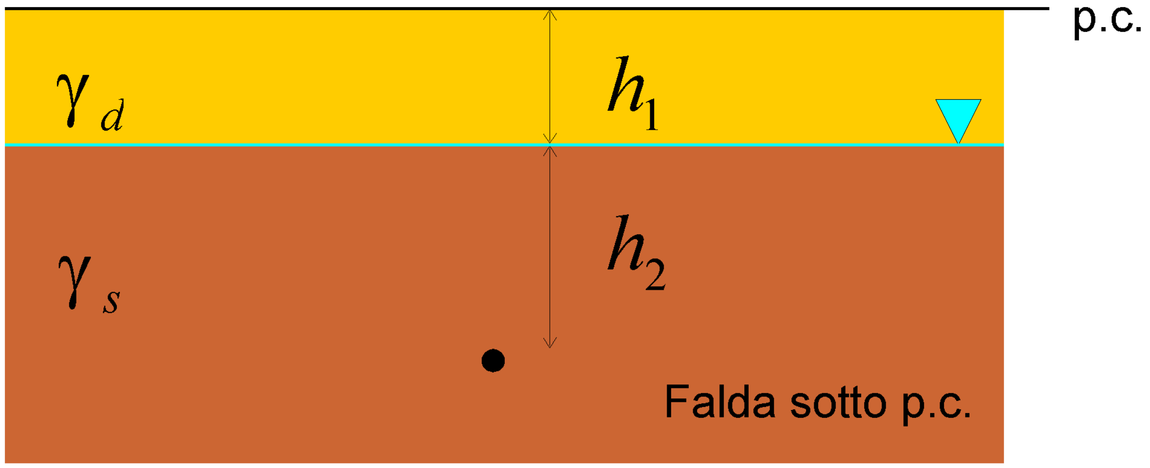
$$F_w = u(A - A_S)$$

$$\boxed{\sigma_{ig} = \sigma' \cong \sigma - u}$$

$$\sigma = \sigma_{ig} + u\left(1 - \frac{A_S}{A}\right) - A' + R'$$

Fig.1a (da Das, 1983)

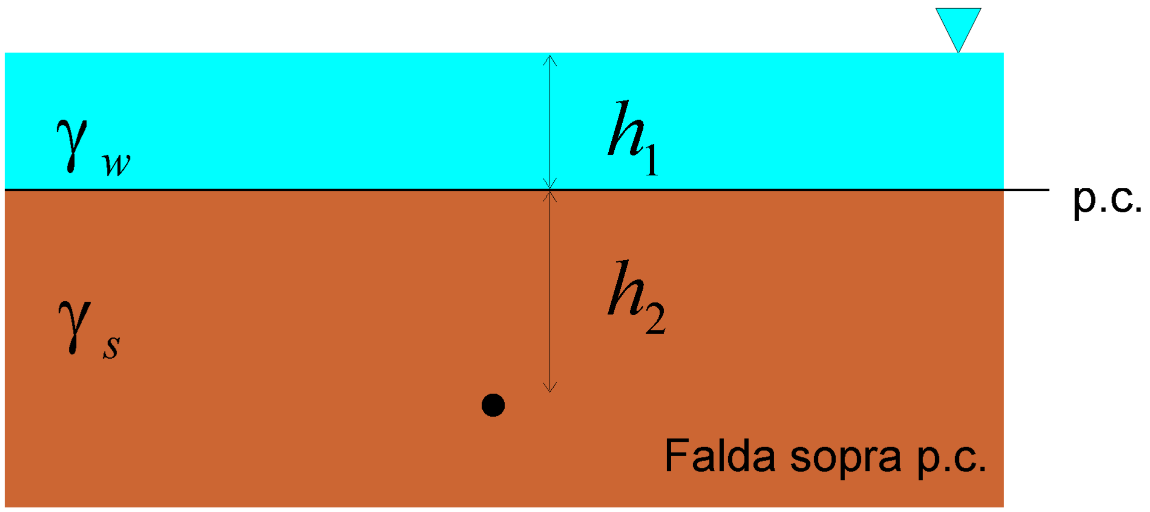
Calcolo delle tensioni efficaci



$$\sigma' = (h_1\gamma_d + h_2\gamma_s) - h_2\gamma_w$$

<u>Nel caso di falda a p.c.</u>

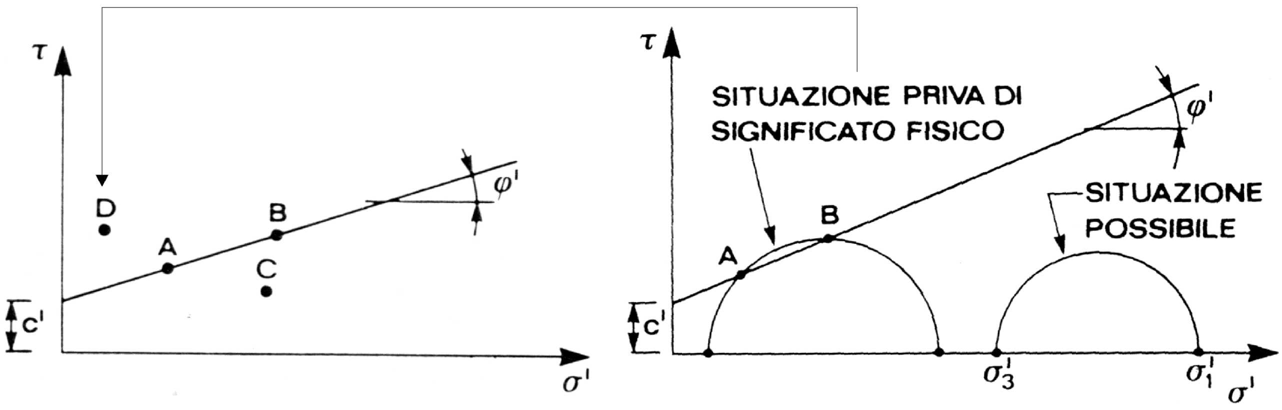
$$\sigma' = h_2\gamma_s - h_2\gamma_w = h_2(\gamma_s - \gamma_w) = h_2\gamma'$$

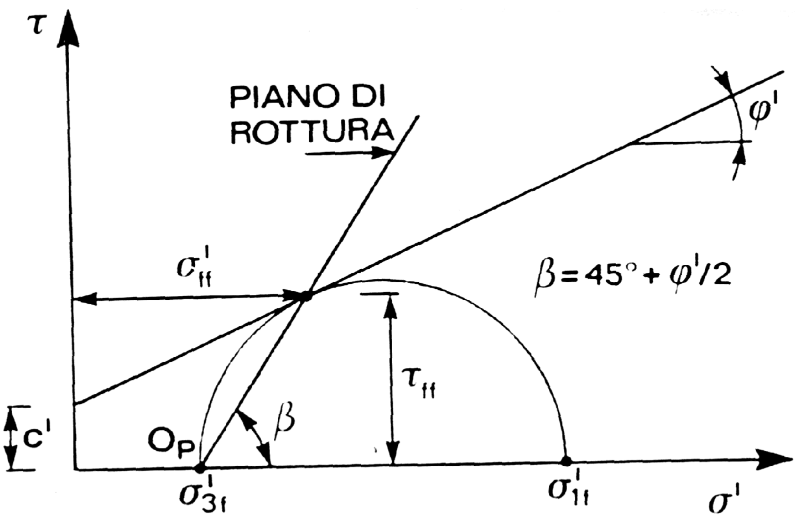


$$\sigma' = (h_2\gamma_s + h_1\gamma_w) - (h_1 + h_2)\gamma_w = h_2\gamma'$$

<u>Fig.1b</u>

Criterio di rottura di Mohr-Coulomb





$$\tau_{ff} = c' + \sigma'_{ff} \tan\phi'$$

Fig.1c (da Lancellotta, 1987)

Resistenza al taglio dei terreni granulari

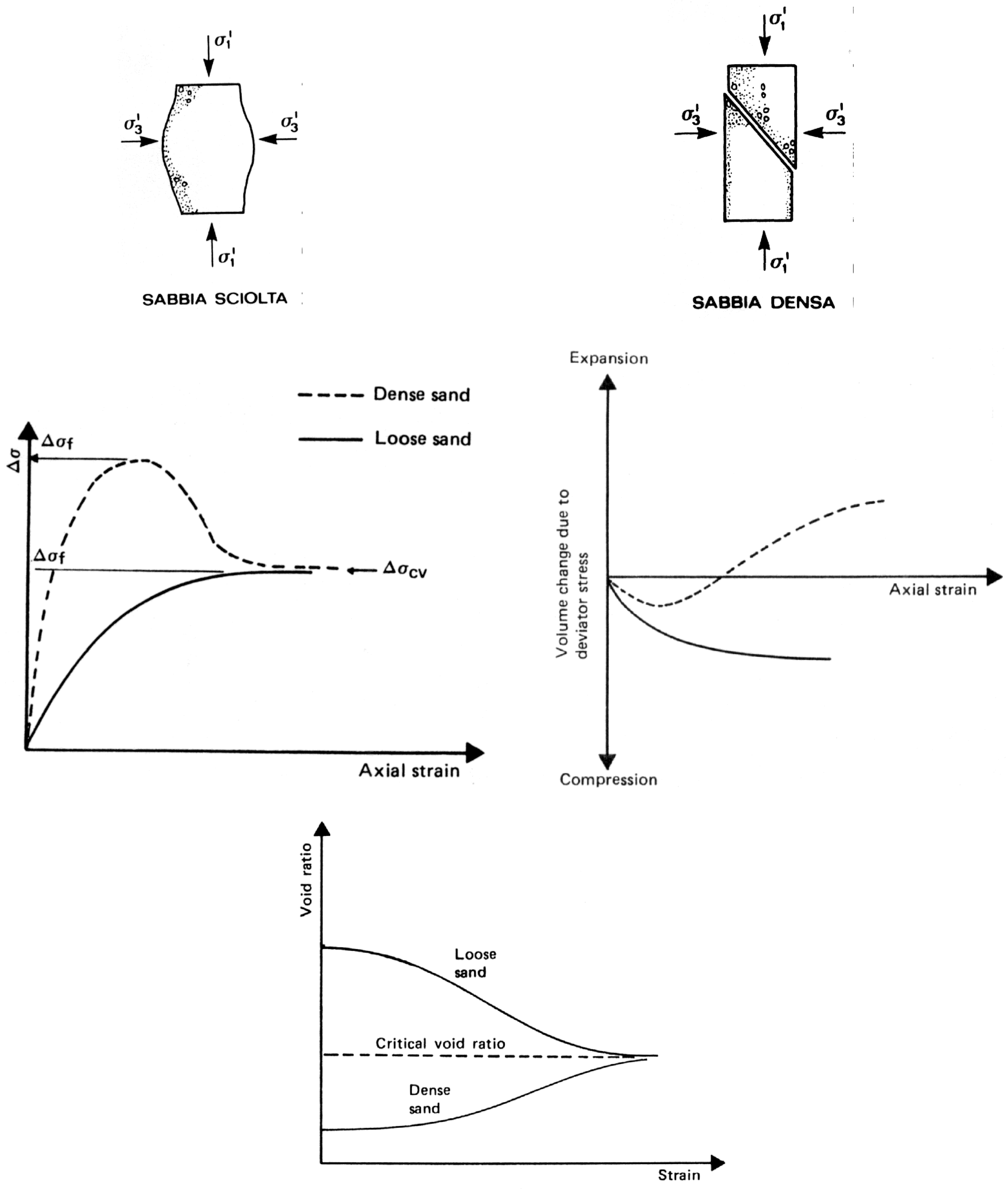
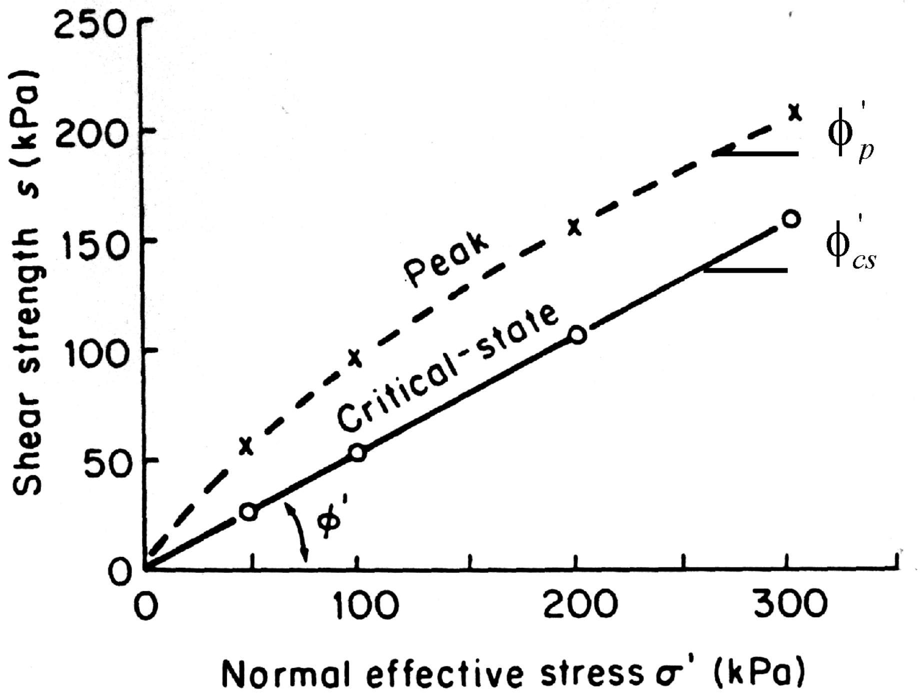


Fig.2a (da Das, 1983; Lancellotta, 1987)

Resistenza al taglio dei terreni granulari



Type of soil	ϕ, deg	ϕ_{cv}, deg
Sand: round grains		
Loose	28 to 30	
Medium	30 to 35	26 to 30
Dense	35 to 38	
Sand: angular grains		
Loose	30 to 35	
Medium	35 to 40	30 to 35
Dense	40 to 45	
Sandy gravel	34 to 48	33 to 36

Fig.2b (da Graham, 1984; Das, 1983)

Fattori che influenzano l'angolo di attrito

Angolo di attrito di picco

	ϕ'_p	$\Delta\phi'_p$
Indice dei vuoti	$\uparrow$ $\downarrow$	5°-7°
Angolarità	$\uparrow$ $\uparrow$	5°-7°
Assortimento granulometrico	$\uparrow$ $\uparrow$	\
Rugosità particelle	$\uparrow$ $\uparrow$	\
Umidità particelle	$\uparrow$ $\downarrow$	1°-2°
Diametro particelle	nessun effetto (e costante)	$\cong 0$
Stress principale intermedio	$\phi_{ps} > \phi_{tx}$	2°-9°
Sovraconsolidazione	scarsa influenza	$\cong 0$

Angolo di attrito in condizione di deformazioni piane (PS)

$$\phi'_p(PS) = 1.5\phi'_p(TX) - 17° \quad \text{se} \quad \phi'_p(TX) > 34°$$

$$\phi'_p(PS) = \phi'_p(TX) \quad \text{se} \quad \phi'_p(TX) \leq 34°$$

$$\tan\phi'_p(PS) = \frac{\tan\phi'_p(TD)}{\cos\phi'_{cv}}$$

Fig.2c

Fattori che influenzano l'angolo di attrito

Angolo di attrito di picco

$$\phi'_p = \phi'_u + \beta$$

ϕ'_u = angolo di attrito del minerale

β = angolo legato all'incastro delle particelle

	ϕ'_u
Sfere d'acciaio	7°
Sfere di vetro	17°
Sabbia quarzosa	26°
Sabbia feldspatica	37°

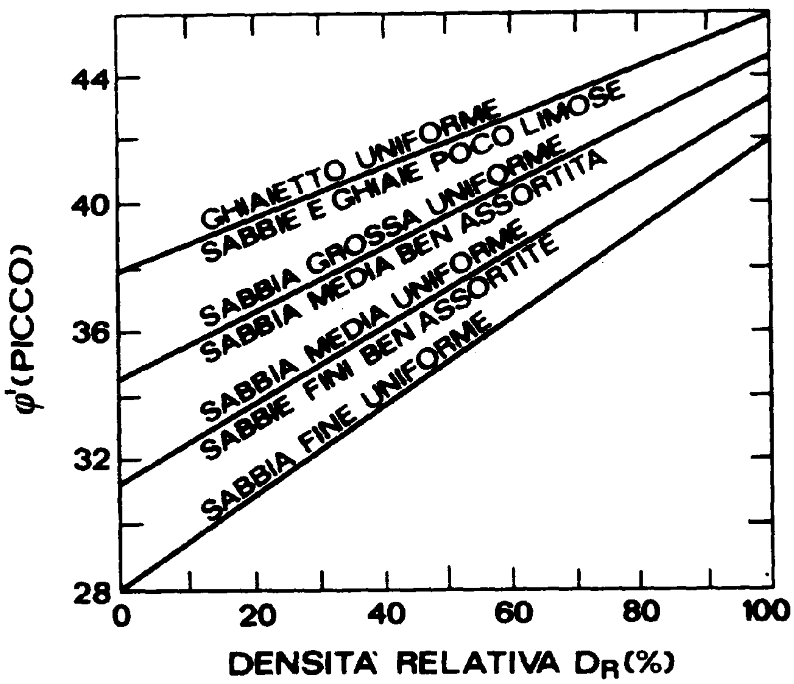


Fig.2d (da Schmertmann, 1977)

Resistenza al taglio dei terreni coesivi

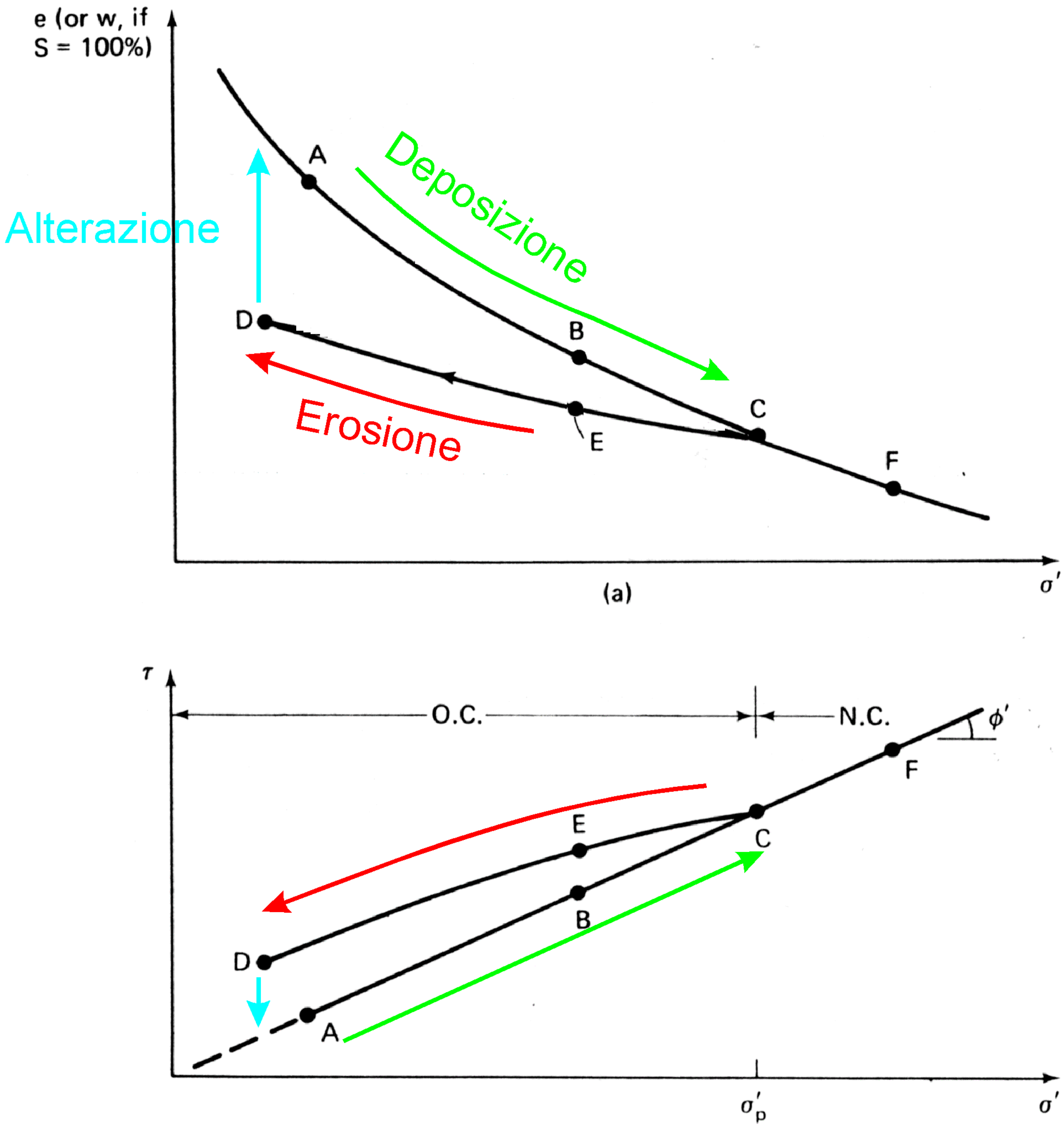
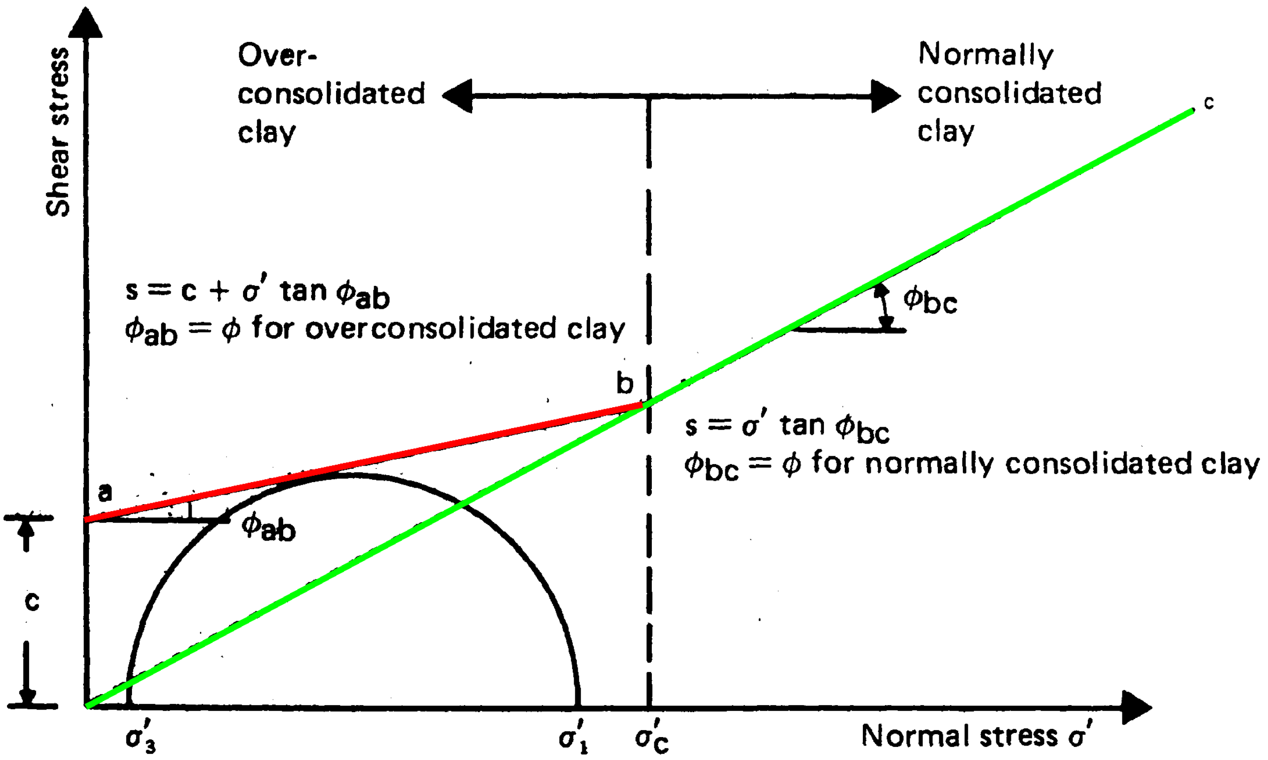


Fig.3a (da Das, 1983)

Resistenza al taglio dei terreni coesivi

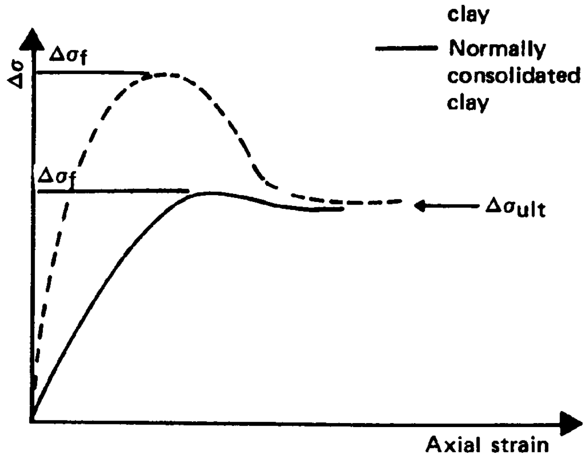


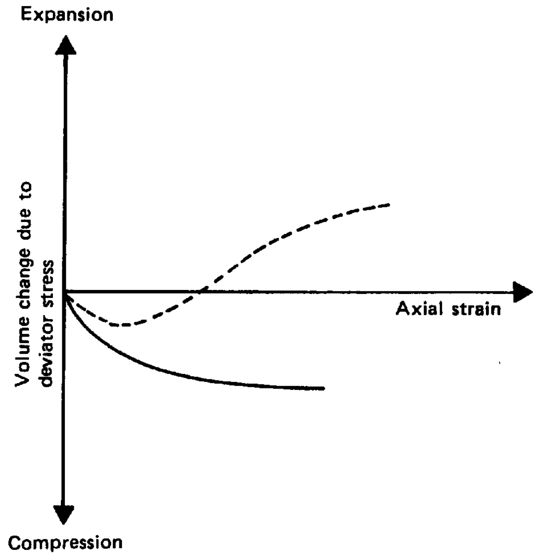
ARGILLE NC $\tau = \sigma' \tan\phi'$

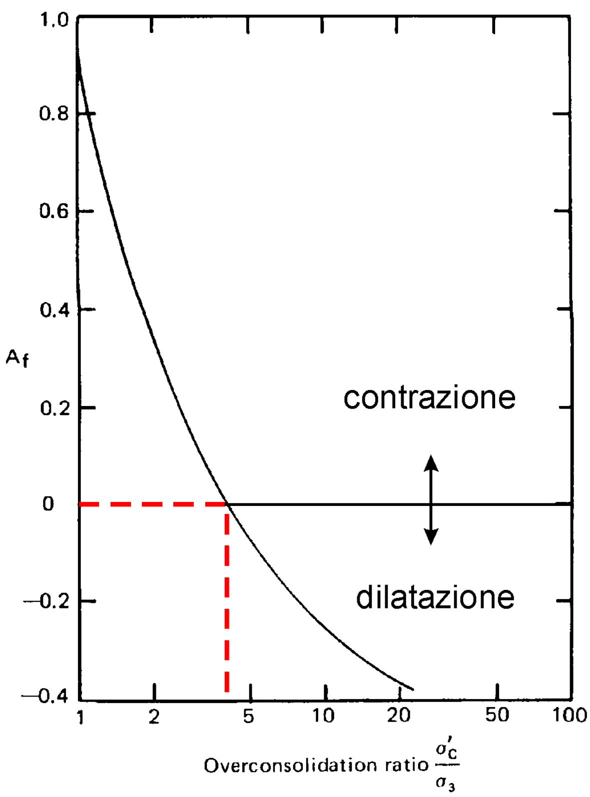
ARGILLE OC $\tau = c' + \sigma' \tan\phi'$

Fig.3b (da Das, 1983)

Resistenza al taglio dei terreni coesivi







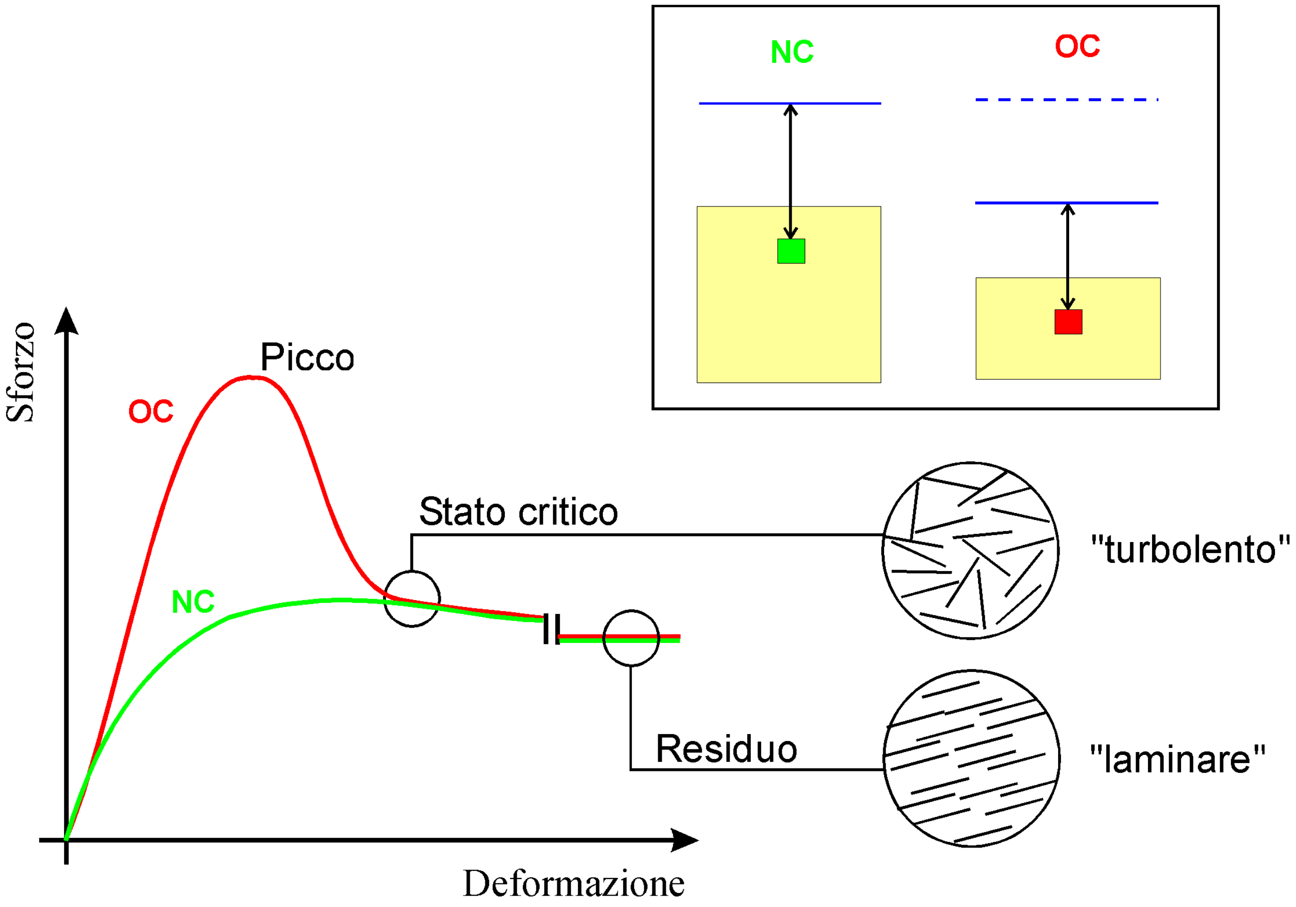
Per terreni saturi:

$$\Delta u = \sigma_3 + A_f (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$$

	A_f
Argille sensitive	0.75 - 1.5
Argille NC	0.5 - 1
Argille OC	-0.5 - 0
Argille sabbiose comp.	0.5 - 0.75

Fig.3c (da Das, 1983)

Resistenza al taglio dei terreni coesivi



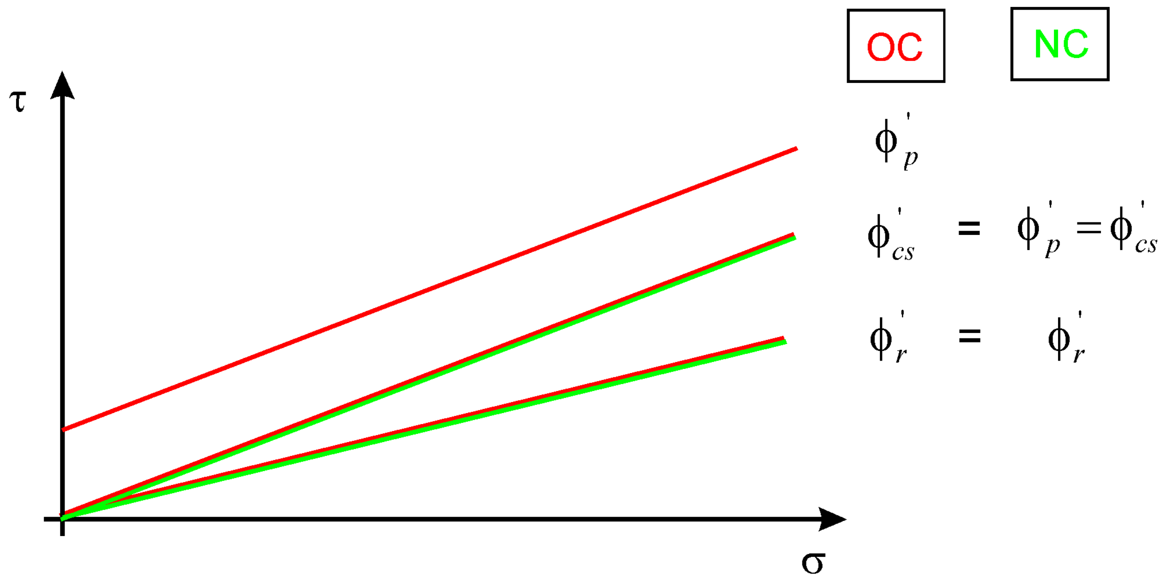
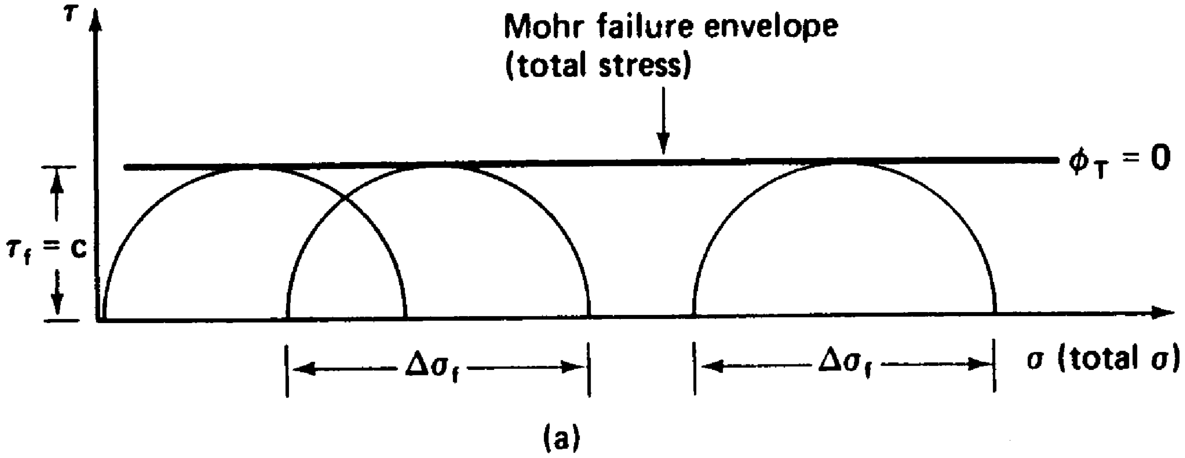
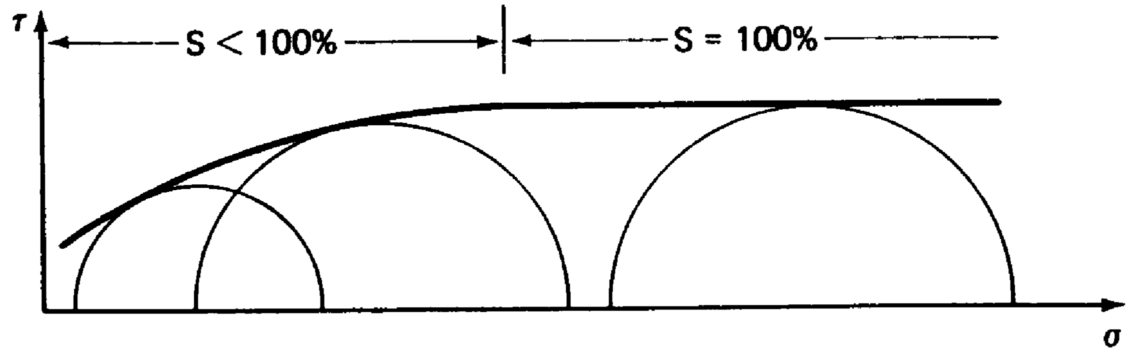


Fig.3d

Resistenza al taglio in condizioni non drenate



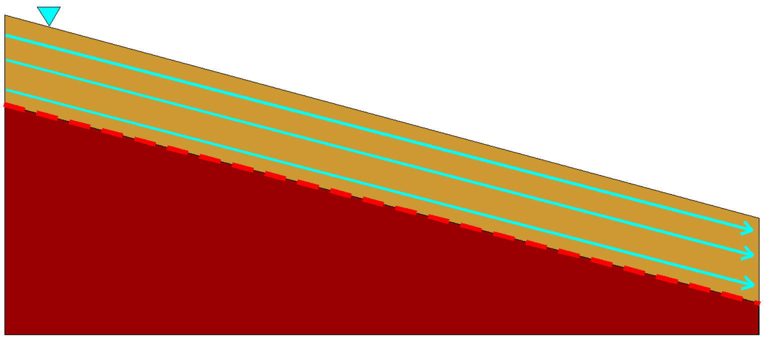


$$c = c_u \qquad\qquad \phi = \phi_u = 0$$

$$\boxed{\tau = c_u}$$

Fig.4a (da Holtz & Kowacs, 1981)

Condizioni di drenaggio

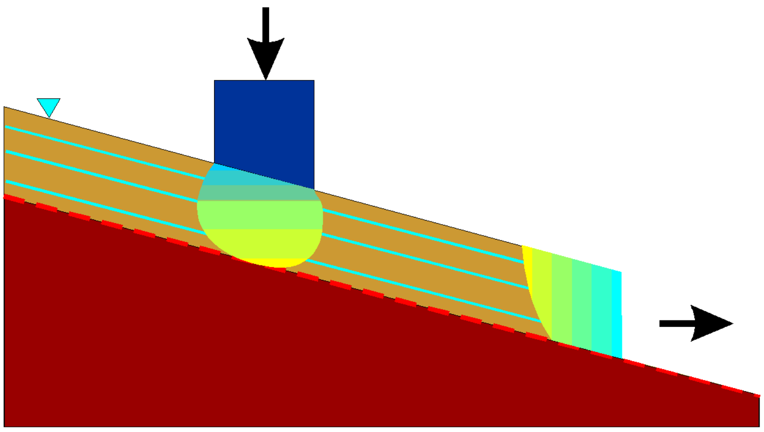


Condizioni drenate

$$u = u_0$$

$$\sigma' = \sigma - u_0$$

$$\boxed{\tau = c' + \sigma' \tan\phi'}$$



Condizioni drenate

$$u = u_0 + \Delta u$$

$$\sigma' = \sigma - (u_0 + \Delta u)$$

$$\boxed{\tau = c' + \sigma' \tan\phi'}$$

Condizioni non drenate

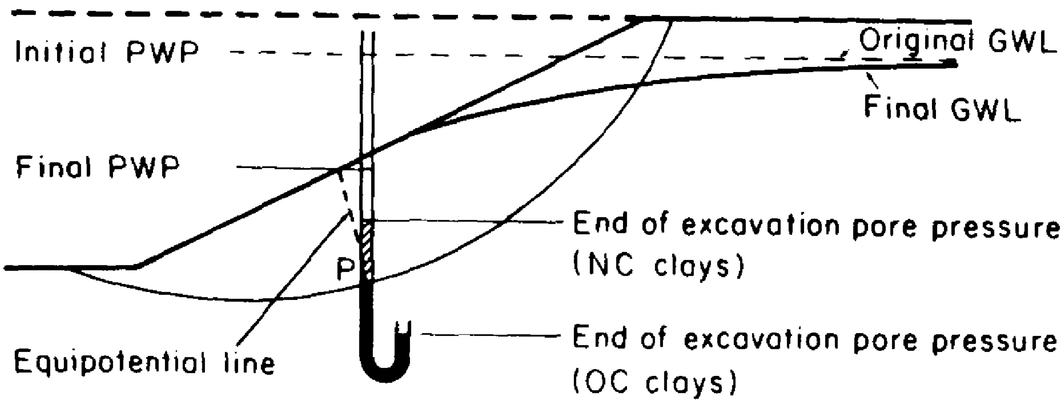
$$u = 0$$

$$\sigma' = \sigma$$

$$\boxed{\tau = c_u}$$

Fig.4b

Condizioni di drenaggio



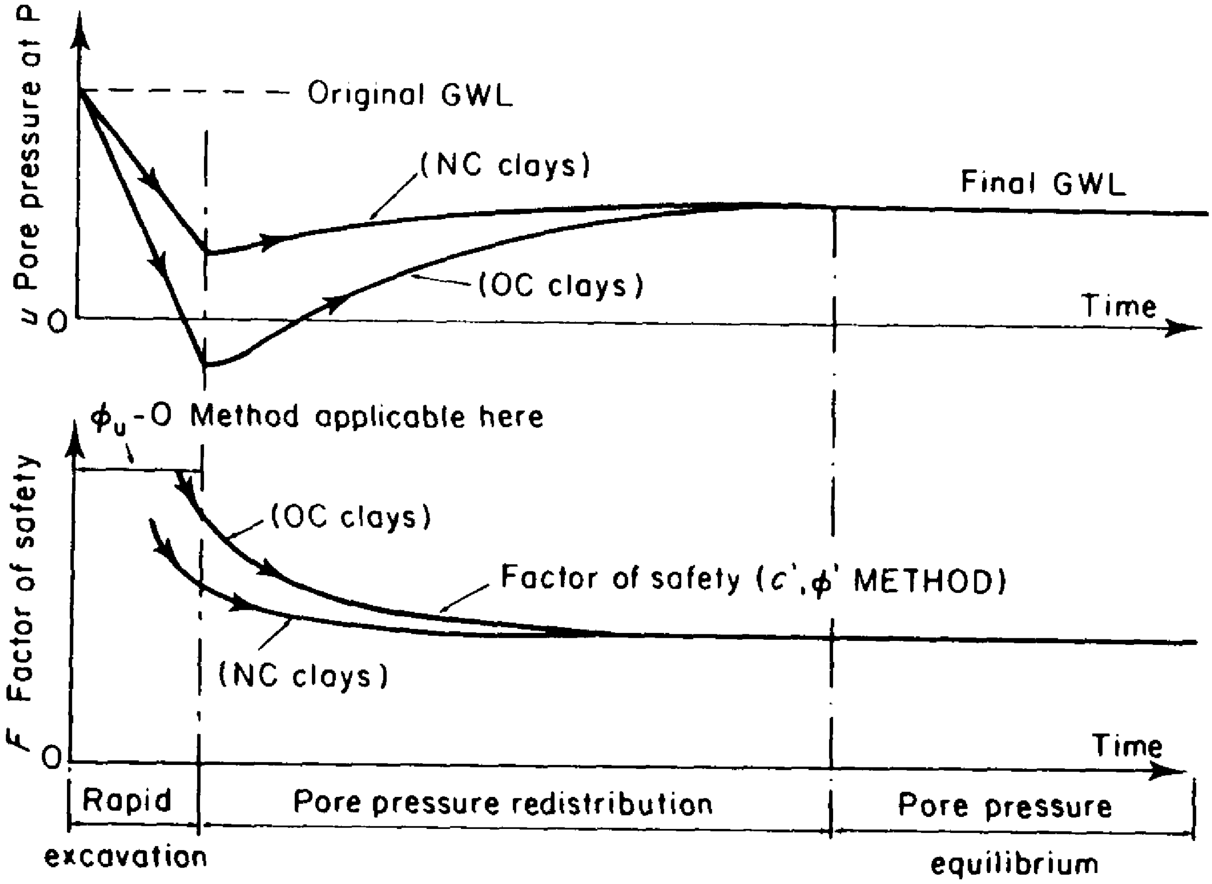


Fig.4c

Forze agenti su un concio

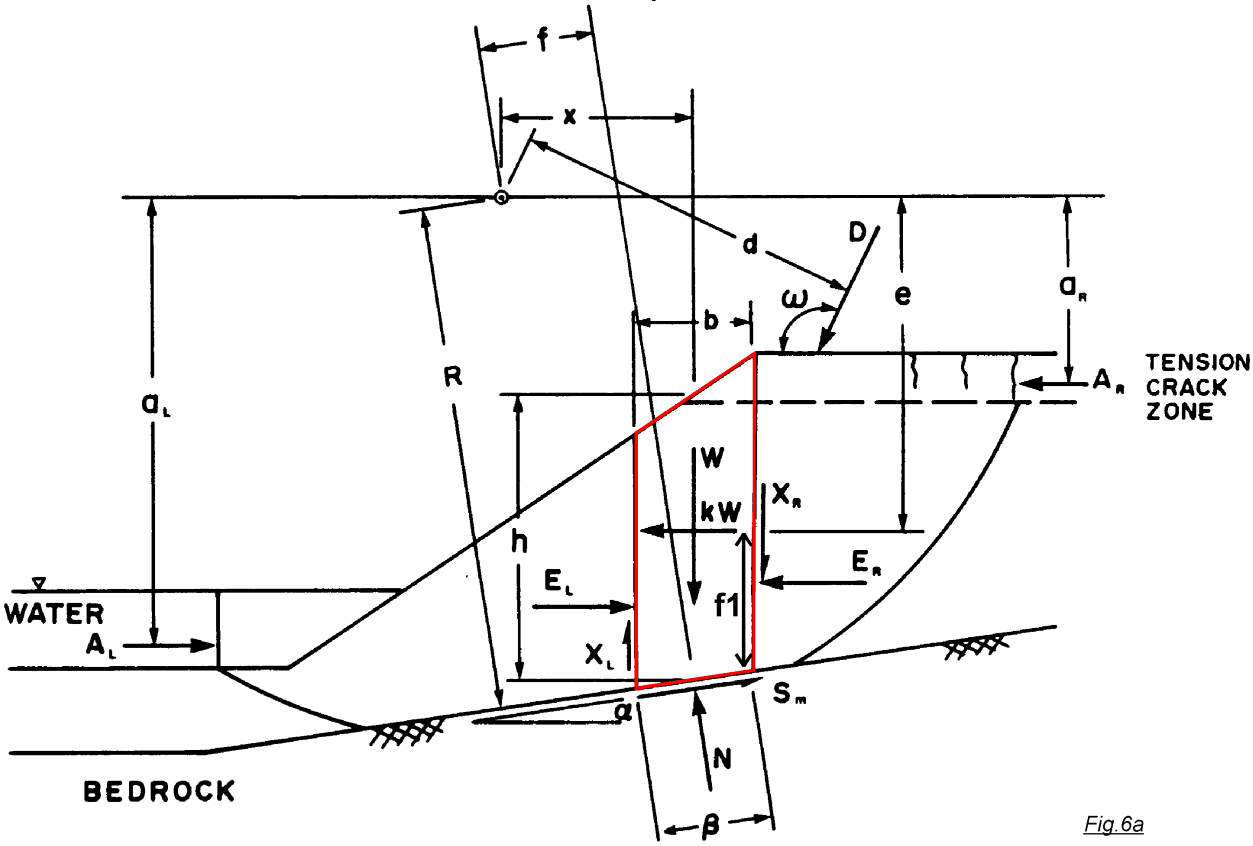
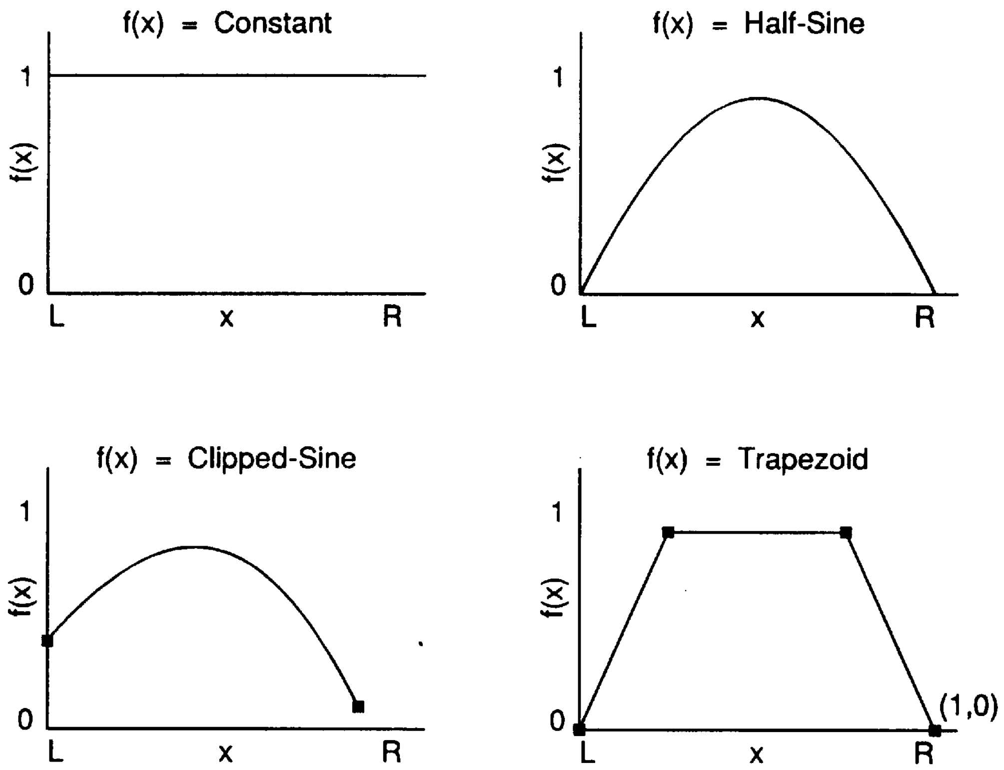


Fig.6a

Esempi di funzioni interconcio



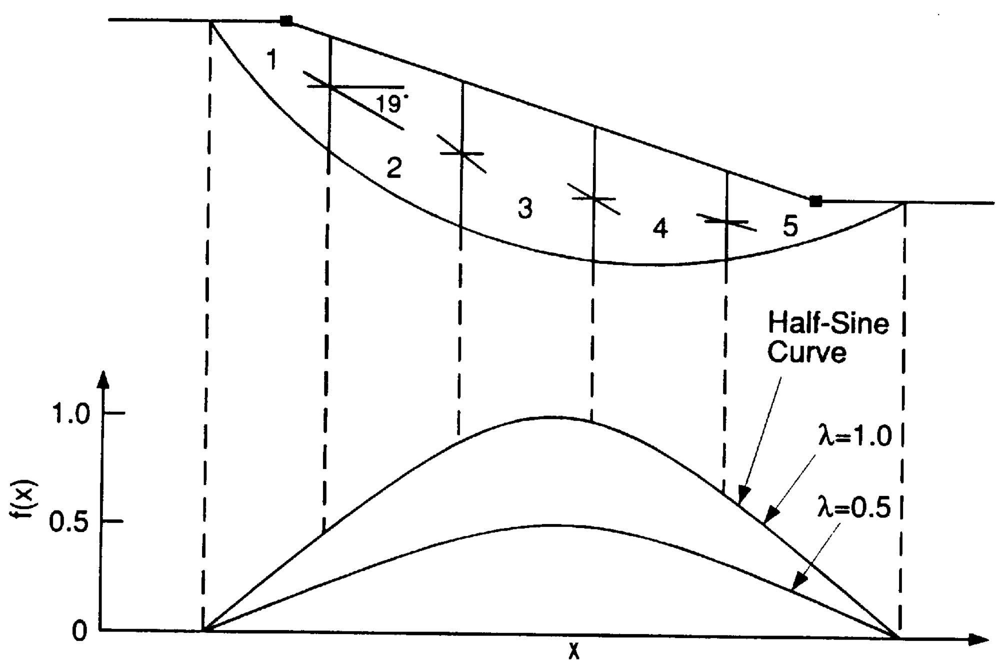
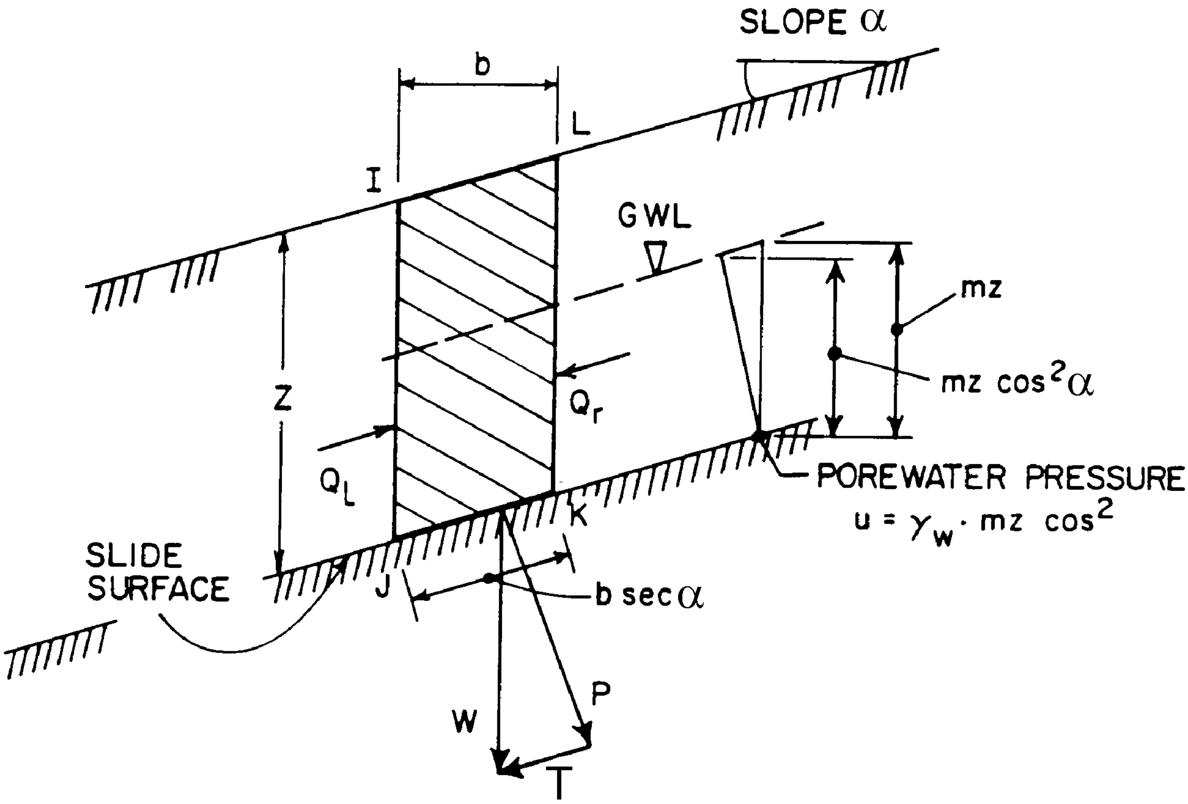


Fig.7 - da Nash (1987)

Pendio infinito

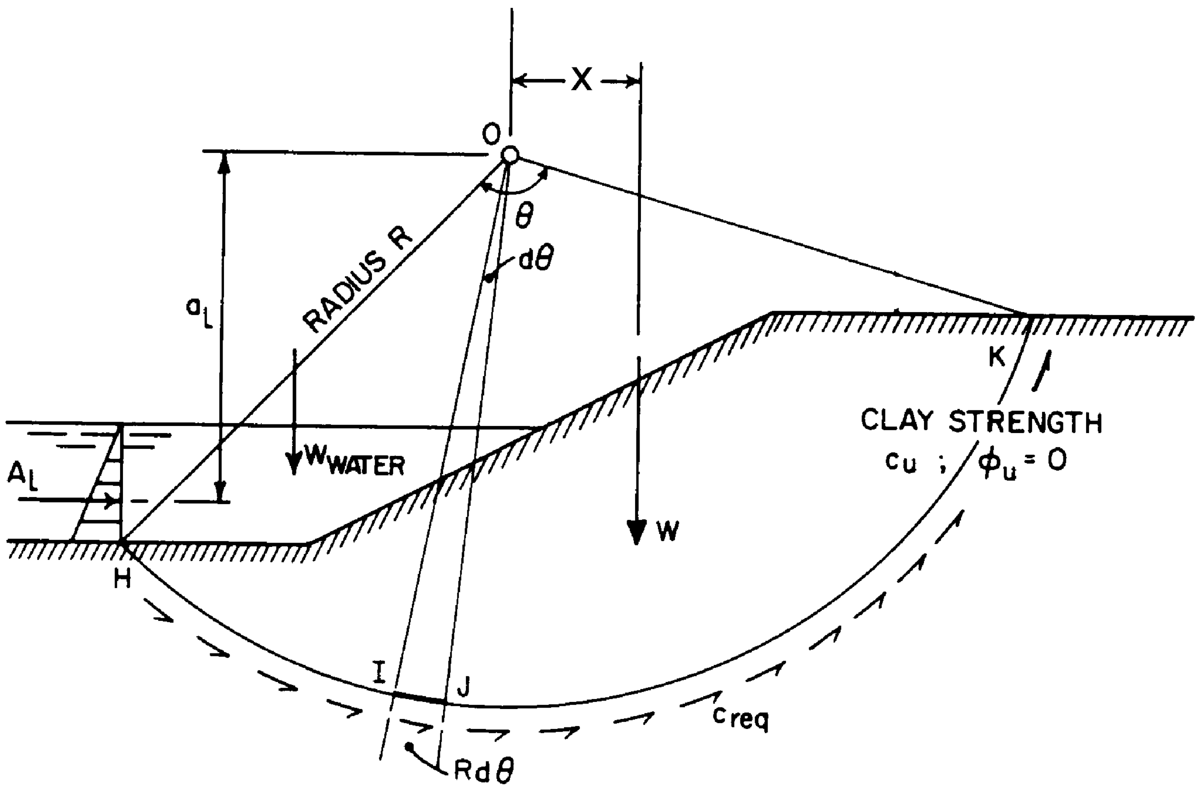


$\sum$ *forze interconcio =0*

$$F = \frac{c' + (\gamma z \cos^2\alpha - u)\tan\phi'}{\gamma z \,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha}$$

Fig.8a (da Graham, 1984)

Scorrimento circolare in condizioni non drenate



$$c = c_u \qquad \phi = \phi_u = 0$$

$$L = R\theta$$

$$\boxed{F = \frac{c_u L R}{W x}}$$

Fig.9 (da Nash, 1987)

Assunzioni dei vari metodi all’Equilibrio Limite

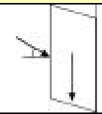
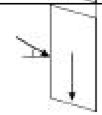
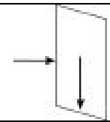
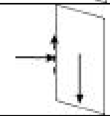
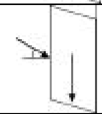
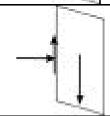
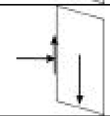
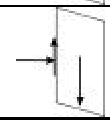
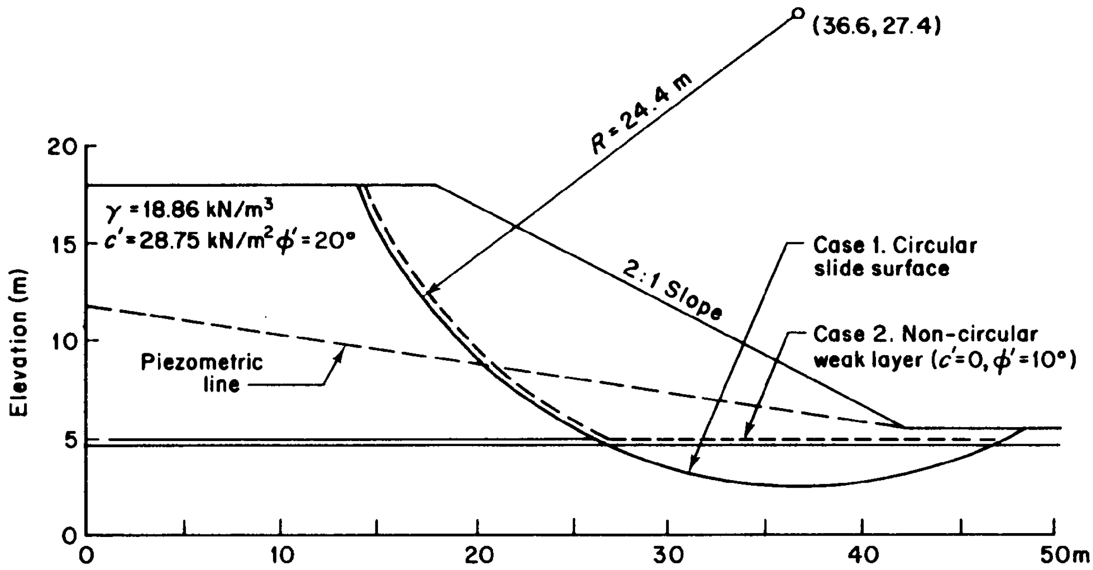
Metodo	Superficie di scorrimento		Calcolo di F		Assunzioni sulle forze interconcio			
	circolare	non-circolare	equilibrio dei momenti	equilibrio delle forze	E, X	f(x)	Descrizione	
Cuneo di Coulomb		☒		☒	\	\	La risultante delle forze interconcio ha un’inclinazione imposta.	
Ordinario dei conci o di Fellenius	☒		☒		$X=E\tan\alpha$	1	La risultante delle forze interconcio è parallela alla base del concio. Si dimostra che, con tale inclinazione, N non è funzione di X ed E.	
Bishop semplificato	☒		☒		X=0	\	La risultante delle forze interconcio è orizzontale (cioè le forze interconcio di taglio sono trascurate).	
Janbu semplificato		☒		☒	X=0	\	La risultante delle forze interconcio è orizzontale. Un fattore empirico f_0 viene utilizzato per tenere conto delle forze di taglio interconcio.	
Spencer	☒	(☒)			$X=E\tan\theta$	1	La risultante delle forze interconcio ha un’inclinazione imposta.	
Morgenstern & Price	☒	☒	☒	☒	$X=E\lambda f(x)$	arbitraria	La direzione della risultante delle forze interconcio è definita dalla funzione f(x).	
Janbu rigoroso	☒	☒	☒	☒	calcolate	calcolata	Il punto di applicazione delle forze normali interconcio è definito assumendo una “linea di applicazione” del carico all’interno del versante.	
Lowe-Karafiath	☒	☒		☒	calcolate	calcolata	La risultante delle forze interconcio ha un’inclinazione imposta, pari alla media dell’inclinazione della superficie topografica e della base del concio	

Fig.10

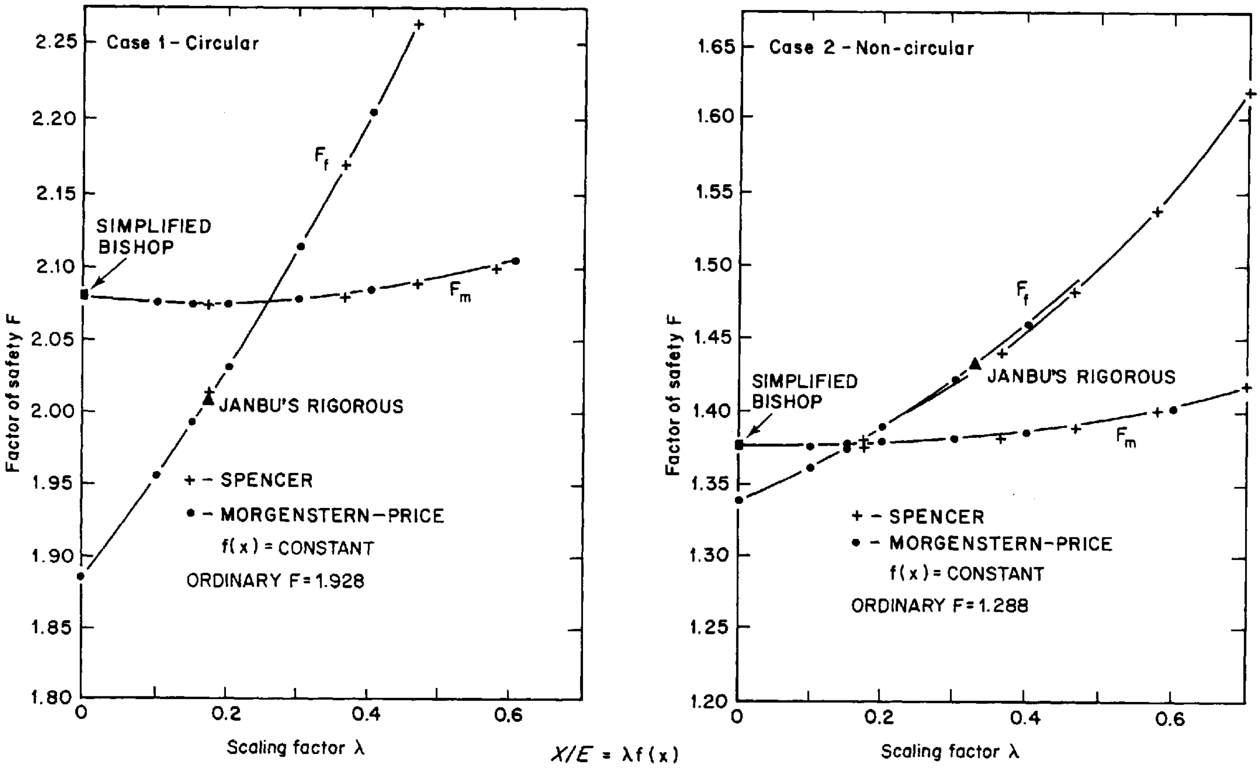
Confronto tra i metodi di analisi all'equilibrio limite



Case no.	Example problem*	Ordinary method	Simplified Bishop method	Spencer's method			Janbu's simplified method	Janbu's rigorous method†	Morgenstern–Price method $f(x)$ = constant	
				F	θ	λ			F	λ
1	Simple 2:1 slope, 12 m high, ϕ' = 20°, c' = 28.75 kPa	1.928	2.080	2.073	14.81	0.237	2.041	2.008	2.076	0.254
2	Same as 1 with a thin, weak layer with ϕ' = 10°, c' = 0	1.288	1.377	1.373	10.49	0.185	1.448	1.432	1.378	0.159
3	Same as 1 except with r_u = 0.25	1.607	1.766	1.761	14.33	0.255	1.735	1.708	1.765	0.244
4	Same as 2 except with r_u = 0.25 for both materials	1.029	1.124	1.118	7.93	0.139	1.191	1.162	1.124	0.116
5	Same as 1 except with a piezometric line	1.693	1.834	1.830	13.87	0.247	1.827	1.776	1.833	0.234
6	Same as 2 except with a piezometric line for both materials	1.171	1.248	1.245	6.88	0.121	1.333	1.298	1.250	0.097

Fig.11 (da Fredlund & Krahn, 1977)

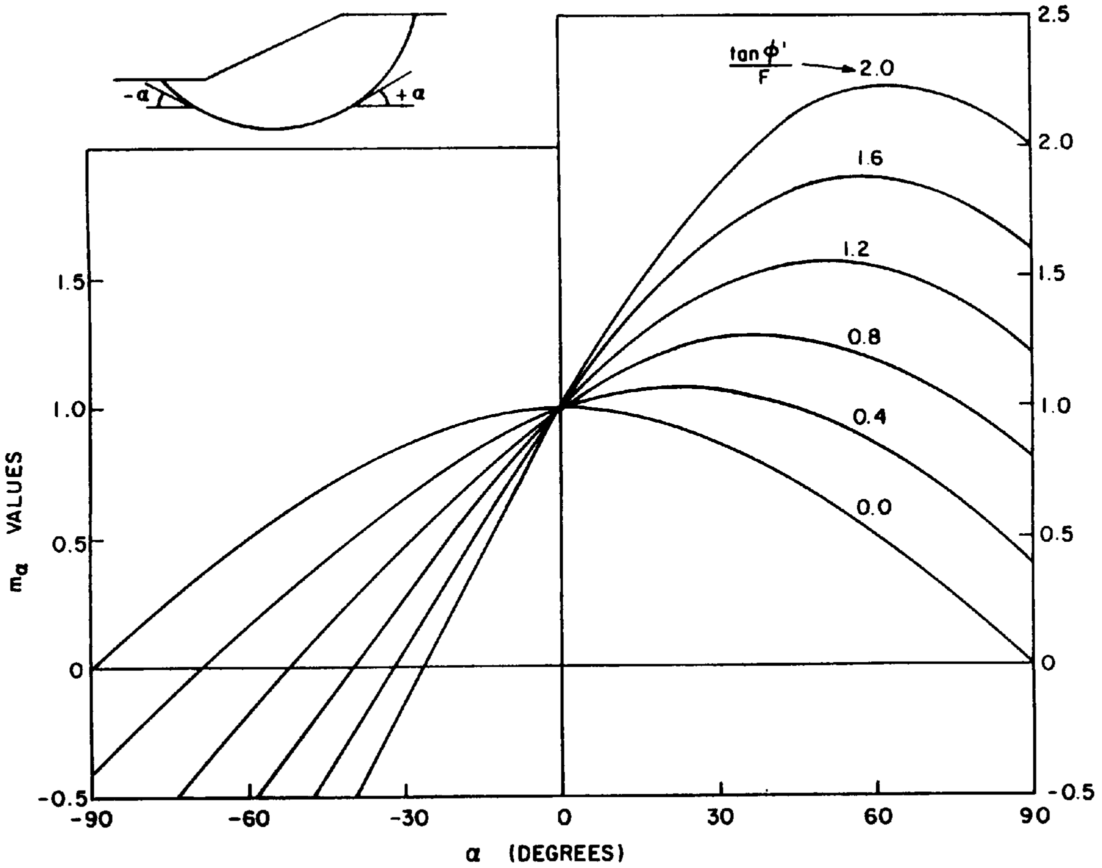
Confronto tra i metodi di analisi all'equilibrio limite



Case no.	Example problem	University of Alberta programme side force function: Constant		Half sine		University of Saskatchewan SLOPE programme side force function: Constant		Half sine		Clipped sine*	
		F	λ	*F*	λ	*F*	λ	*F*	λ	*F*	λ
1	Simple 2:1 slope, 12 m high, $\phi' = 20°$, $c' = 28.75$ kPa	2.085	0.257	2.085	0.314	2.076	0.254	2.076	0.318	2.083	0.390
2	Same as 1 with a thin, weak layer with $\phi' = 10°$, $c' = 0$	1.394	0.182	1.386	0.218	1.378	0.159	1.370	0.187	1.364	0.203
3	Same as 1 except with $r_u = 0.25$	1.772	0.351	1.770	0.432	1.765	0.244	1.764	0.304	1.779	0.417
4	Same as 2 except with $r_u = 0.25$ for both materials	1.137	0.334	1.117	0.441	1.124	0.116	1.118	0.130	1.113	0.138
5	Same as 1 except with a piezometric line	1.838	0.270	1.837	0.331	1.833	0.234	1.832	0.290	1.832	0.300
6	Same as 2 except with a piezometric line for both materials	1.265	0.159	Not converging		1.250	0.097	1.245	0.101	1.242	0.104

Fig.12 (da Fredlund & Krahn, 1977)

Problemi di instabilità numerica



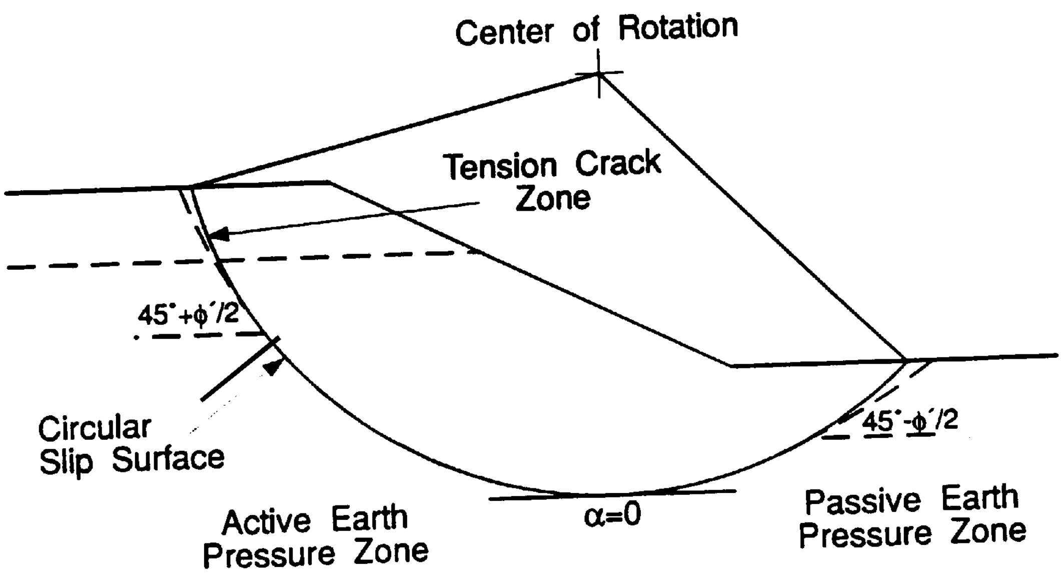
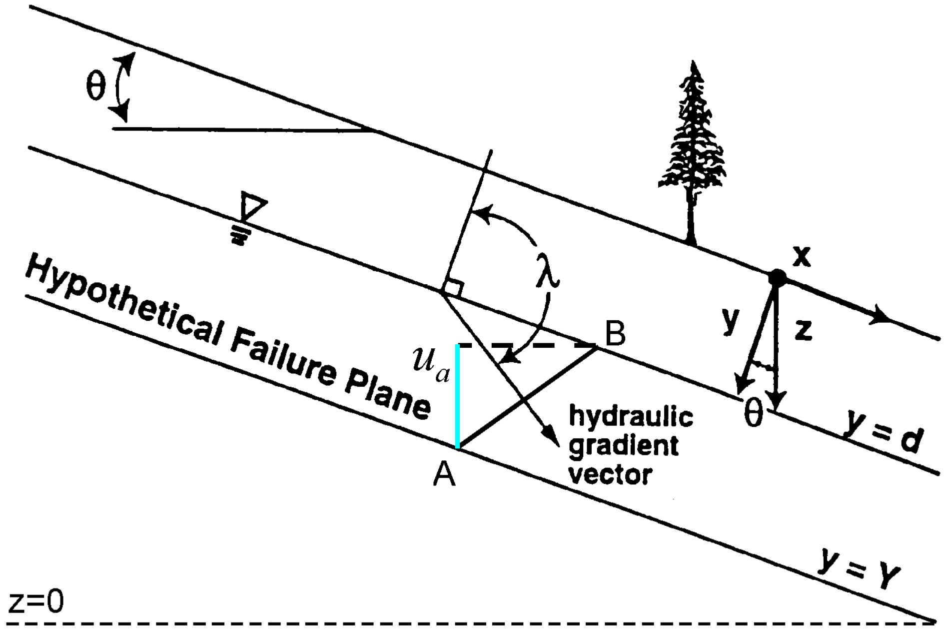


Fig.13

Pendio infinito con moto di filtrazione a direzione variabile



$$h_A = h_B$$

$$u_A = (z_B - z_A)\gamma_w$$

$$z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w}$$

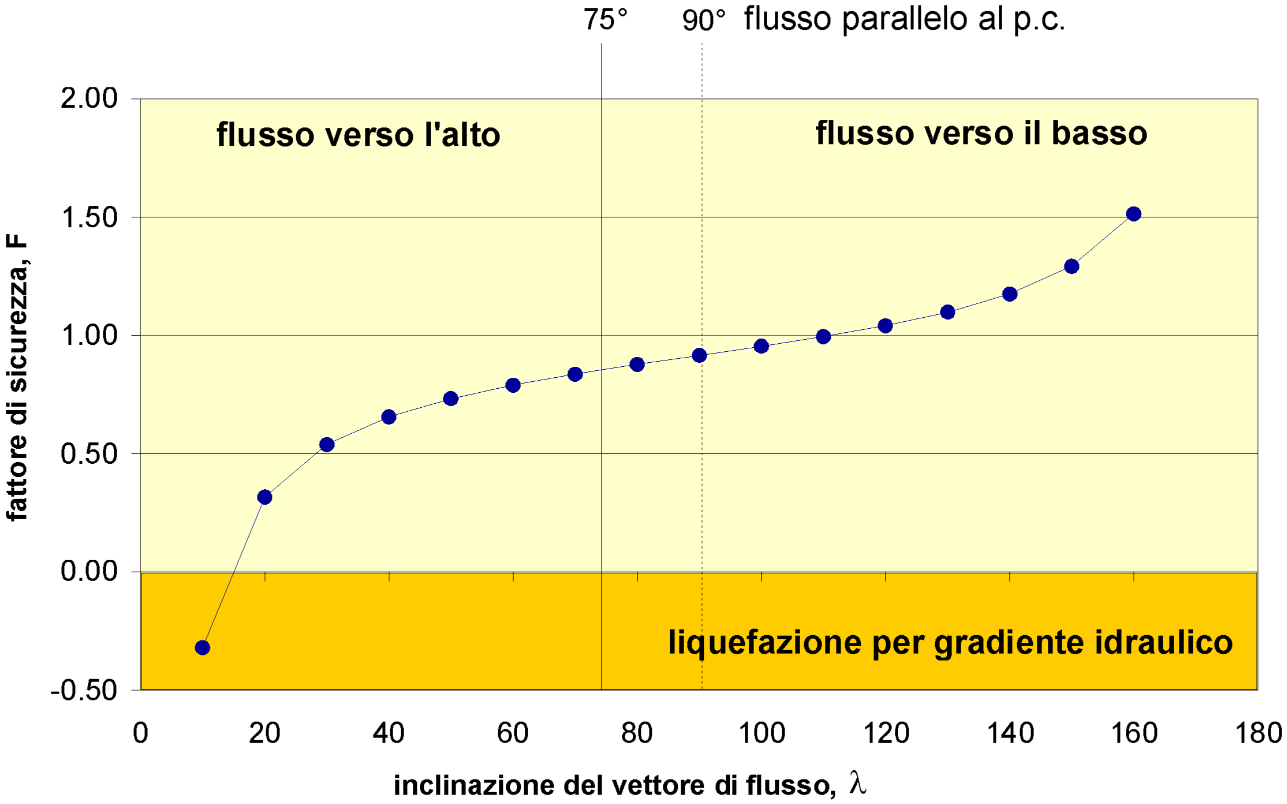
$$F = \frac{c' + (\gamma z \cos^2\alpha - u_A)\tan\phi'}{\gamma z \,\mathrm{sen}\,\alpha \cos\alpha}$$

$$\boxed{u_A = \gamma_w d_w \left(1 - \frac{\tan(\lambda + \theta - 90)}{\tan(90 - \theta) + \tan(\lambda + \theta - 90)}\right)}$$

Fig.14

Pendio infinito con moto di filtrazione a direzione variabile

Variazione del fattore di sicurezza con l'inclinazione del vettore di flusso

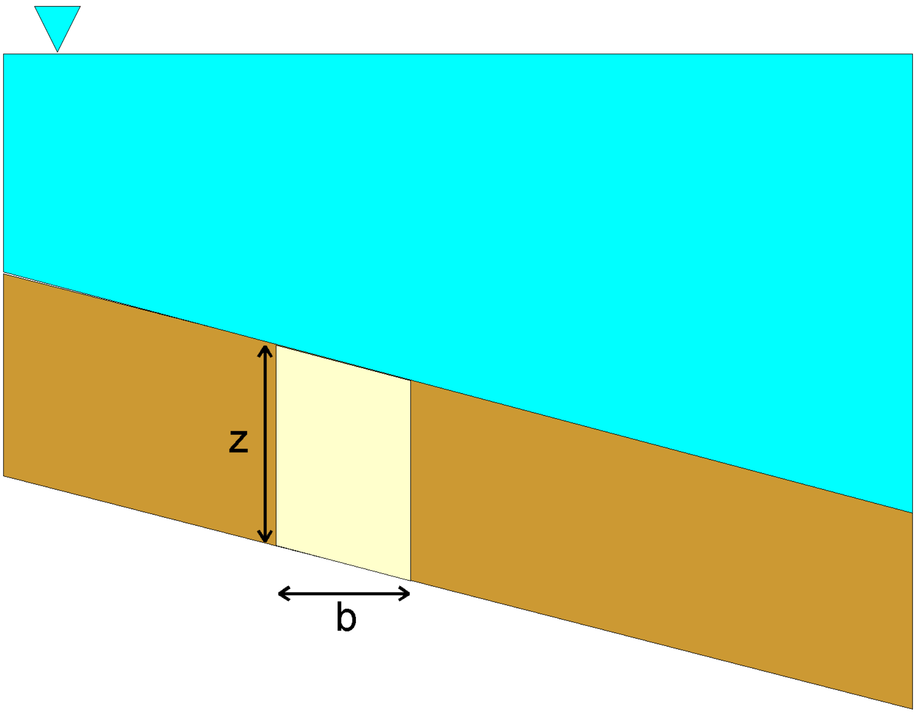


θ=15°	z=2 m
c'=0	falda a p.c.
ϕ'=25°	

Fig.15

Stabilità di un versante sommerso

Pendio infinito



La risultante delle forze dell'acqua è verticale e pari a:

$$F_w = zb\gamma_w$$

$$N = bz\gamma\cos\alpha - bz\gamma_w\cos\alpha = bz\gamma'\cos\alpha$$

$$T = bz\gamma\,\mathrm{sen}\,\alpha - bz\gamma_w\,\mathrm{sen}\,\alpha = bz\gamma'\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\boxed{F = \frac{c' + (\gamma' z\cos^2\alpha)\tan\phi'}{\gamma' z\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}}$$

Fig.16

Analisi "a ritroso" di movimenti franosi

Inviluppo di resistenza

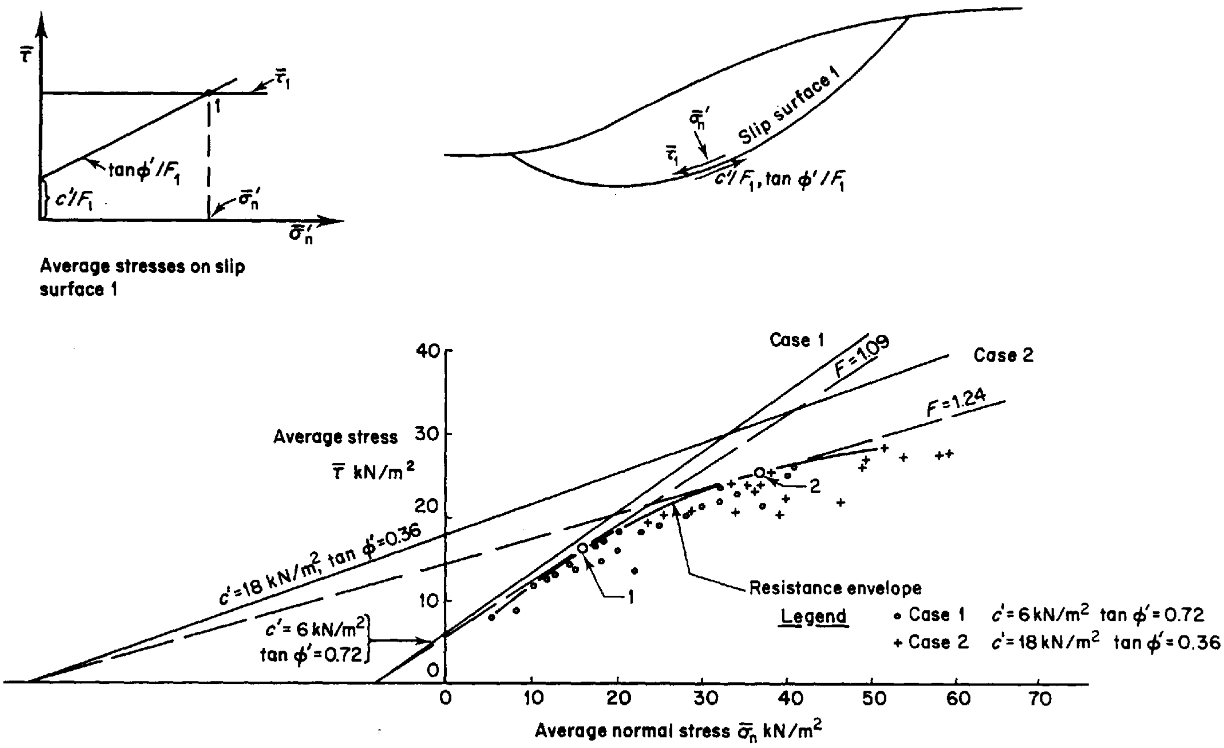


Fig.18 (da Kenney, 1967)

Analisi "a ritroso" di movimenti franosi

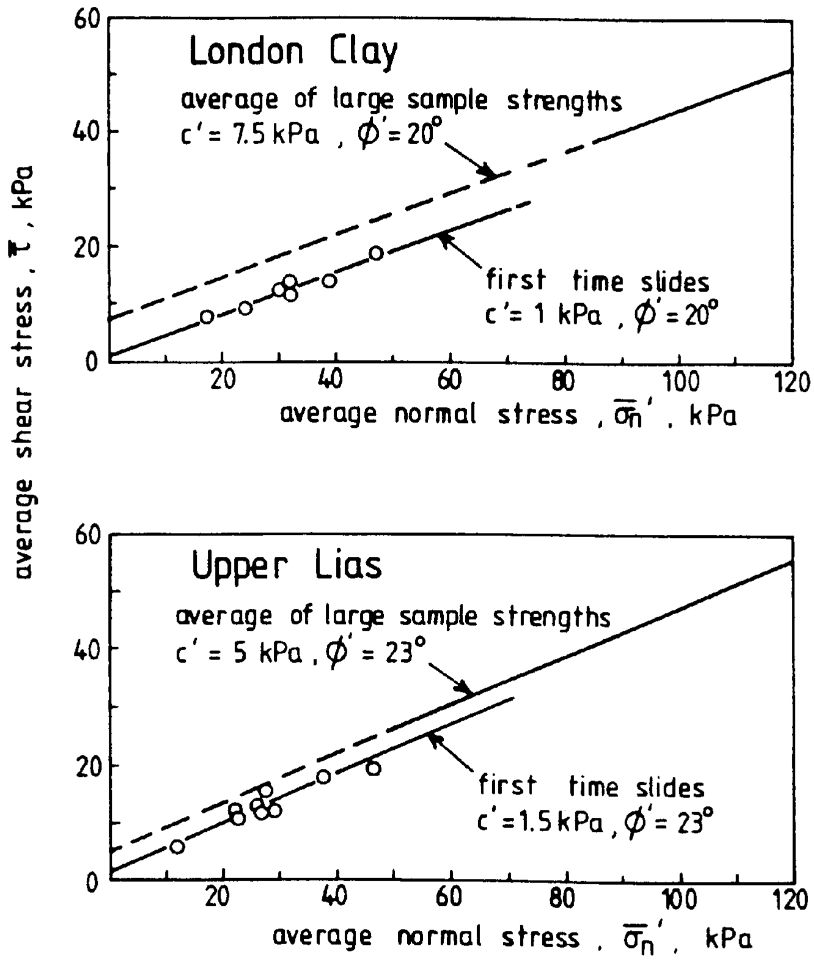


Fig.19 (da Chandler, 1984a)